1902-1984

6.3 Diracs magnetischer Monopol

Maxwell-Gleichungen im statischen Limes:

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

Ohne Ladungen und Ströme: Maxwell-Gleichungen sind invariant unter $\vec{E}\to\vec{B}$, $\vec{B}\to-\vec{E}$.

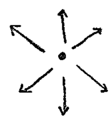
Mit — " — : es gibt eine „Asymmetrie" wegen Abwesenheit von magnetischen Monopolen (= magn. Ladungen).

Im Prinzip könnte es aber sein, dass es magnetische Monopole gibt; sie kommen aber so selten vor (Elementarteilchen mit einer sehr grossen Masse ??) dass sie bis heute nicht experimentell gesehen worden sind.

Diracs erstaunliches Ergebnis: gibt es auch nur einen magnetischen Monopol, dann ist die elektrische Ladung notwendigerweise quantisiert. (Alle bekannten Teilchen haben in der Tat eine Ladung, die das Vielfache der Elektronladung ist.)

Anfangspunkt: der führende Term in der Multipolentwicklung der magnetischen Induktion sei ein Monopolterm, wie beim elektrischen Feld (Seite 60):*

$$\vec{B} = q_M \frac{\vec{r}}{r^3}$$



magnetische Ladung

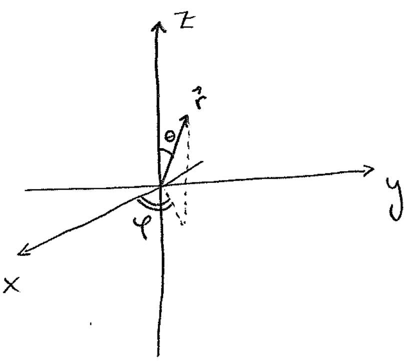
Wir werden das entsprechende Vektorpotential brauchen.

Seite 71: $\nabla\cdot\vec{B}=0$ „$\Rightarrow$" $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$.

Jetzt: $\nabla\cdot\vec{B} = 4\pi q_M\,\delta^{(3)}(\vec{r}) \neq 0$.

Aber für $\vec{r}\neq\vec{0}$ ist $\nabla\cdot\vec{B}=0$, und wir können auf jeden Fall lokal ein Vektorpotential konstruieren.

Wir werden Kugelkoordinaten für diesen Zweck benutzen.



---

* Bis jetzt war der führende Term (Seite 76)

$$\vec{B} = \frac{3\vec{r}(\vec{\mu}\cdot\vec{r})-\vec{\mu}r^2}{r^5}$$

In Kugelkoordinaten gilt (vgl. Jackson, letzte Seite): $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$

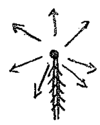
$$\Rightarrow \quad \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right] + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

Ansatz:

$$\vec{A} = \vec{A}^{(1)} := \underbrace{q_M \frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}}_{A_\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}^{(1)} = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(q_M \frac{1-\cos\theta}{r}\right) = \frac{q_M}{r^2}\vec{e}_r = q_M \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \text{OK!}$$

Das Problem: $\vec{A}^{(1)}$ ist singulär für $\theta = \pi$ (nicht für $\theta = 0$!), d.h. auf der negativen z-Achse.
Die Singularität wird „Dirac-String" genannt.

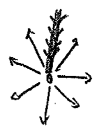


Ein anderer Ansatz:

$$\vec{A} = \vec{A}^{(2)} := -q_M \frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}^{(2)} = -\hat{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(q_M \frac{1+\cos\theta}{r}\right) = \frac{q_M}{r^2}\vec{e}_r = q_M \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \text{OK!}$$

Das Problem: $\vec{A}^{(2)}$ ist singulär für $\theta = 0$ (nicht für $\theta = \pi$!), d.h. auf der positiven z-Achse.



Wir könnten aber

$$\vec{A} = \begin{cases} \vec{A}^{(1)}, & 0 \le \theta < \pi - \varepsilon \\ \vec{A}^{(2)}, & \varepsilon < \theta \le \pi \end{cases}, \quad \varepsilon = 0^+,$$

benutzen, um $\vec{B}$ im ganzen Raum zu beschreiben!

Weil $\vec{A}^{(1)}$ und $\vec{A}^{(2)}$ dieselbe Induktion $\vec{B}$ liefern, müssten sie unterschiedlichen Eichbedingungen entsprechen!

$$\vec{A}^{(2)} - \vec{A}^{(1)} = \frac{-2q_M}{r\sin\Theta}\,\vec{e}_\varphi \overset{?}{=} \nabla\chi \qquad \text{(vgl. Seite 71)}$$

In Kugelkoordinaten gilt (vgl. Jackson, letzte Seite):

$$\nabla\chi = \vec{e}_r \frac{\partial\chi}{\partial r} + \vec{e}_\Theta \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\Theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\,.$$

Lösung:

$$\chi = -2q_M\varphi \,!$$

Einschub aus der Quantenmechanik:

Geladene Teilchen werden mittels einer „Wellenfuktion" $\psi\in\mathbb{C}$ beschrieben. Die Wellenfunktion ist eichabhängig; nur $|\psi|^2$ ist physikalisch. Der Unterschied zwischen zweier Eichbedingungen:

Quantenmechanik I / Theorie II

Quantenmechanik II

$$\psi^{(2)}(\vec{x}) = e^{\frac{iq\chi(\vec{x})}{\hbar c}}\,\psi^{(1)}(\vec{x})\,;$$

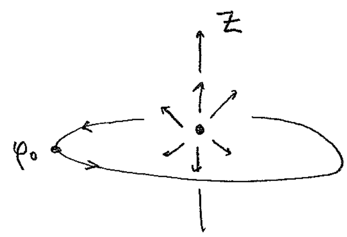
$$\hbar := \frac{h}{2\pi}\,; \quad h = \text{„Plancksche Konstante"} = 6{,}626\times10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

1858-1947

Jetzt also:

$$\psi^{(2)} = \exp\left(-\frac{2iqq_M\varphi}{\hbar c}\right)\psi^{(1)}\,.$$

Betrachte jetzt Wellenfunktion auf einer Kurve um den Monopol. Gehe einmal entlang dieses Kreises zum Anfangspunkt zurück.



Dabei müssen $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ in sich selbst übergehen (d.h., eindeutig sein):

$$\psi^{(1)}(\varphi_0) = \psi^{(1)}(\varphi_0 + 2\pi)$$
$$\psi^{(2)}(\varphi_0) = \psi^{(2)}(\varphi_0 + 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad \exp\left(-\frac{2iqq_M\varphi_0}{\hbar c}\right) = \exp\left(-\frac{2iqq_M\varphi_0}{\hbar c}\right)\exp\left(-\frac{4iqq_M\pi}{\hbar c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4qq_M\pi}{\hbar c} = 2\pi n \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q = n \cdot \frac{\hbar c}{2q_M}}$$

Fazit: Wenn es nur einen Monopol mit Ladung q_M gibt, müssen sämtliche geladenen Teilchen im Universum elektrische Ladungen haben, die Vielfachen von $\frac{\hbar c}{2q_M}$ sind!

[Kann das Argument richtig sein ??]

—— o ——

(Dieses Argument hat auf jeden Fall viele wichtige Begriffe eingeführt, insbesondere den der „Dualität": falls q_M „klein" ist, dann ist q „groß", und umgekehrt.)