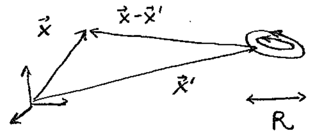
6.2 Multipolentwicklung, magnetischer Dipol

Seite 71: Vektorpotential in der Coulomb-Eichung: $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$.

Magnetische Induktion: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Fragestellung (wie im Kapitel 5.3 mit dem elektrischen Feld):
wie sieht das Vektorpotential an Abständen $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg R$ aus?



Sei $r := |\vec{x}|$.

Seite 67: $$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{cr}\int_V d^3\vec{x}'\,\vec{J}(\vec{x}') + \sum_{j=1}^{3}\frac{x^j}{cr^3}\int_V d^3\vec{x}'\, x'^j\,\vec{J}(\vec{x}') + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

$\boxed{\text{1. Term}}$

* intuitiv: $\nabla\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow$ keine Quellen $\Rightarrow$ Stromlinien geschlossen
  $\Rightarrow$ Mittelwert gleich null.

* mathematisch: $\vec{J} \neq 0$ nur in einem endlichen Volumen.
  Nehme V groß genug so dass $\vec{J}(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V} = 0$.

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{J}(\vec{x})\,g(\vec{x}) \qquad \Big|\ g(\vec{x}) \text{ beliebig}$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3\vec{x}\ \nabla\cdot\left[\vec{J}(\vec{x})g(\vec{x})\right]$$

$$= \int_V d^3\vec{x}\left[\underbrace{(\nabla\cdot\vec{J})}_{=0}g + \vec{J}\cdot\nabla g\right]$$

$$= \int_V d^3\vec{x}\left[\vec{J}\cdot\nabla g\right]$$

Wähle $g(\vec{x}) := x'^1 \Rightarrow \int_V d^3\vec{x}\, J^1 = 0$

$x'^2 \Rightarrow \int_V d^3\vec{x}\, J^2 = 0$

$x'^3 \Rightarrow \int_V d^3\vec{x}\, J^3 = 0$.

$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x}'\,\vec{J}(\vec{x}') = 0$; der erste Term in der Multipolentwicklung verschwindet; „es gibt keine magnetische Monopole".

$\boxed{\text{2. Term}}$

Wähle jetzt $\quad g(\vec{x}') := x'^k x'^j$

$$\Rightarrow \quad \vec{J}\cdot\nabla\, g(\vec{x}') = \sum_{i=1}^{3} J^i \partial_i x'^k x'^j$$

$$= \sum_{i=1}^{3} J^i \left(\delta_{ik} x'^j + \delta_{ij} x'^k \right) = J^k x'^j + J^j x'^k$$

$$\Rightarrow \quad \int_V d^3\vec{x}' \left[J^k(\vec{x}') x'^j + J^j(\vec{x}') x'^k \right] = 0 \qquad \forall\ k, j$$

Damit bekommt der 2. Term die Form

$$\int_V d^3\vec{x}'\ x'^j\ \vec{J}(\vec{x}') = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \int_V d^3\vec{x}'\ J^k x'^j$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \int_V d^3\vec{x}' \left\{ \underbrace{\tfrac{1}{2}\left[J^k x'^j + J^j x'^k\right]}_{0} + \tfrac{1}{2}\left[J^k x'^j - J^j x'^k\right] \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\vec{e}_k}{2} \int_V d^3\vec{x}' \left\{ J^k(\vec{x}') x'^j - J^j(\vec{x}') x'^k \right\}$$

Jetzt schreiben wir: $\quad J^k x'^j - J^j x'^k$

$$= \left(\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{kn} \right) J^m x'^n$$

$$\stackrel{!}{=} \varepsilon^{ikj} \varepsilon^{imn} J^m x'^n .$$

Sei $\vec{\mu}$, mit Komponenten

$$\mu^i := -\frac{1}{2c}\, \varepsilon^{imn} \int_V d^3\vec{x}'\ J^m(\vec{x}') x'^n ,$$

$$\text{d.h.} \quad \vec{\mu} := \frac{1}{2c} \int_V d^3\vec{x}'\ \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') ,$$

das <u>magnetische Dipolmoment</u>.

Dann wird der 2. Term insgesamt zum

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{x^j}{r^3}\, \vec{e}_k\, \varepsilon^{ikj} \left(-\mu^i\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_k\, \varepsilon^{kij}\, \frac{\mu^i x^j}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) = \boxed{\frac{\vec{\mu}\times\vec{x}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)}$$

Die entsprechende magnetische Induktion:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \sum_k \vec{e}_k\, \varepsilon^{kij} \partial_i \varepsilon^{jln} \frac{\mu^l x^n}{r^3} = \sum_k \vec{e}_k \left(\delta_{kl}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{il}\right) \mu^l \partial_i \left(\frac{x^n}{r^3}\right)$$

$$= \sum_k \vec{e}_k \left(\mu^k \delta_{in} - \mu^i \delta_{kn} \right) \left(\frac{\delta_{ni}}{r^3} - 3\,\frac{x^n x^i}{r^5} \right)$$

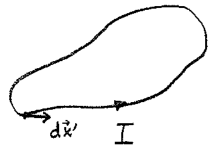
$$= \cancel{\frac{3\vec{\mu}}{r^3}} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} - \cancel{\frac{3\vec{\mu} r^2}{r^5}} + 3\,\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{x}\ \vec{x}}{r^5} = \frac{3\vec{x}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x}) - \vec{\mu}\, r^2}{r^5}$$

Vergleiche mit elektrischem Dipolfeld (Seite 67):

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\nabla\, \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{3\vec{x}\,(\vec{p}\cdot\vec{x}) - \vec{p}\, r^2}{r^5}$$

———— o ————

Beispiel: magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

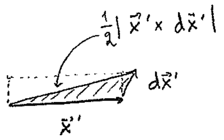


Seite 73: $d^3\vec{x}'\,\vec{J}(\vec{x}') = I\,d\vec{x}'$

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2c}\oint \vec{x}' \times d\vec{x}'$$

* **Geometrische Interpretation:**

Wähle Ebene senkrecht auf $\vec{x}'$ und $d\vec{x}'$:



Flächenelement: $\quad |d\vec{f}| = \frac{1}{2}\,|\vec{x}' \times d\vec{x}'|$

Mit Richtung „$\odot$": $\quad d\vec{f} = \frac{1}{2}\,\vec{x}' \times d\vec{x}$ $\quad$ (vgl. Seite 11)

D.h.,
$$\vec{\mu} = \frac{I}{c}\cdot\vec{f}\,,$$
wobei $\vec{f}$ die von Leiter aufgespannte Fläche beschreibt.**

* **Beziehung zum Drehimpuls:**

$\vec{J}$ sei erzeugt durch Punktladungen q_a bei $\vec{x}_a(t)$ mit $\vec{v}_a = \dot{\vec{x}}_a$:

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sum_a q_a \vec{v}_a\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)$$

Dann ist

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int_V d^3\vec{x}\;\; \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x})$$
$$= \frac{1}{2c}\sum_a q_a\, \vec{x} \times \vec{v}_a$$
$$= \frac{1}{2c}\sum_a \frac{q_a}{m_a}\,\vec{x} \times \vec{p}_a = \frac{1}{2c}\sum_a \frac{q_a}{m_a}\,\vec{L}_a\,.$$

Für alle Ladungsträger identisch gilt

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2cm}\cdot\vec{L} \quad ; \quad \vec{L} = \text{Gesamtdrehimpuls.}$$

Bemerkung: Elementarteilchen haben „Eigendrehimpuls" bzw. Spin, $\vec{S}$. Zum Beispiel, für Elektronen:

$$\vec{\mu}_e = g_e \cdot \frac{e}{2m_e c}\cdot\vec{S}\,,$$

wobei $g_e \approx 2{,}0023\ldots$ der „gyromagnetische Faktor" heisst.

** Zum Nachdenken: Was ist die genaue Interpretation von $\vec{f}$, falls der Ringstrom **nicht** in einer Ebene liegt?

Magnetischer Dipol in einem äußeren Feld (vgl. Seite 69)

Das System sei wie auf Seite 74, aber das Ergebnis wird jetzt durch das magnetische Dipolmoment ausgedrückt.

$$\underset{\text{b auf a}}{\vec{F}_{ba}} = \frac{1}{c} \int_V d^3\vec{x}\ \vec{J}_a(\vec{x}) \times \vec{B}_b(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k\, \varepsilon^{kij} \int_V d^3\vec{x}\ J_a^i(\vec{x})\, B_b^j(\vec{x}) .$$

Taylor-Entwicklung: $\quad B_b^j(\vec{x}) = B_b^j(\vec{0}) + \vec{x}\cdot\nabla B_b^j(\vec{0}) + \dots$

Der erste Term verschwindet wegen $\int_V d^3\vec{x}\ J_a^i(\vec{x}) = 0$ (Seite 75).

Der zweite Term:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{ba}}} \approx \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k\, \varepsilon^{kij} \underbrace{\left[\frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\ J_a^i(\vec{x})\, x^l\right]}_{\text{Seite 76: } \varepsilon^{mil}\,(-\mu_a^m)} \partial_l B_b^j(\vec{0})$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \left(\delta_{km}\delta_{jl} - \delta_{kl}\delta_{jm}\right)(-\mu_a^m)\, \partial_l B^j{}_b$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \Big(-\mu_a^k \underbrace{\nabla\cdot\vec{B}_b}_{0} + \partial_k\, \vec{\mu}_a\cdot\vec{B}_b\Big) = \underline{\underline{\nabla\left(\vec{\mu}_a\cdot\vec{B}_b\right)}}$$

D.h., magnetische Dipolmomente erfahren Kraft im inhomogenen Magnetfeld. (wegen ∇)

Beispiel: Stern-Gerlach-Experiment für die Bestimmung des Elektronspins.
(Stern 1888-1969, Gerlach 1889-1979)

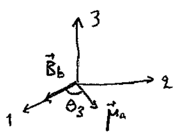
Wechselwirkungsenergie: $\quad \vec{F}_{ba} = -\nabla V_W \quad ; \quad V_W = -\vec{\mu}_a\cdot\vec{B}_b$

Wie auf Seite 69 für den elektrischen Dipol im elektrischen Feld!

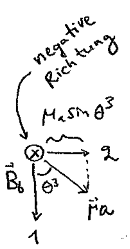
Drehmoment: (Seite 38)

$$N^i = -\frac{\partial V_W}{\partial \theta^i}$$

Wähle Koordinaten:



$$N^3 = \frac{\partial}{\partial\theta^3}\ \mu_a B_b \cos\theta^3 = -\mu_a B_b \sin\theta^3 =$$



$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{N} = \vec{\mu}_a \times \vec{B}_b(0)}$$