# 6. Magnetostatik

Seite 59:
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \end{cases}$$

Seite 56-57: $\nabla\cdot\vec{J} = 0$.
„Keine Quellen"

## 6.1 Vektorpotential, Kraft zwischen Stromkreisen

$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$

Nehme an: $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, $\vec{A}$ = „Vektorpotential".

Es folgt:
$$\nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \partial_i \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k = \varepsilon^{ijk}\partial_i\partial_j A^k = 0 \qquad \left(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

Ein solches Feld ist nicht eindeutig:
$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi, \quad \chi \text{ beliebig}$$
$$\Rightarrow \vec{B}' = \vec{B} + \underbrace{\nabla\times(\nabla\chi)} = \vec{B}.$$

i-Komponente: $\varepsilon^{ijk}\partial_j\partial_k\chi = 0$.

Aber, unter bestimmten Annahmen über die Topologie des Raums, es existiert (unten konstruktiver Beweis für $\mathbb{R}^3$).

$\boxed{\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}}$

(i) Schreibe $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$;
$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{B} &= \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\left[\varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon^{klm}\partial_l A^m\right] \\
&= \sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\left[(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A^m\right] \\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}
\end{aligned}$$

Wir können ein eindeutiges $\vec{A}$ definieren, indem wir eine zusätzliche Bedingung setzen. Verlange jetzt
$$\nabla\cdot\vec{A} = 0 \qquad \text{„Coulomb-Eichbedingung"}$$

Es gilt:
$$\nabla\cdot\vec{A}' = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla^2\chi = \nabla^2\chi := 0.$$

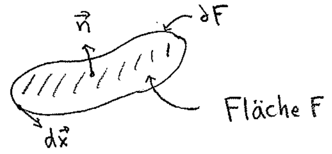
Seite 64: im $\mathbb{R}^3$ gibt es keine nichttriviale endliche Lösungen für $\chi$, d.h. Coulomb-Eichbedingung entfernt die unerwünschte Freiheit.

Die Maxwell-Gleichung bekommt die Form
$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

Also erfüllt jede Komponente die Poisson-Gleichung!

Lösung (Seite 64):
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

(ii) der „traditionelle" Weg.




* Integriere $\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$ über die Fläche:

$$\underbrace{\frac{4\pi}{c}\int_F d\vec{f}\cdot\vec{J}}_{\text{Seite 55: Strom I durch F}} = \int_F d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\underset{\text{Stokesscher Satz}}{=} \int_{\partial F} d\vec{x}\cdot\vec{B} \qquad \text{„Ampèresches Gesetz"}$$

1775–1836

1819–1903 Stokesscher Satz

D.h., Linienintegral der magnetischen Induktion $\vec{B}$ entlang einer geschlossenen Kurve $= \frac{4\pi}{c}$ mal Strom durch die Kurve.

* Nehme rot auf beiden Seiten von $\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$:

$$\underbrace{\nabla\times(\nabla\times\vec{B})} = \frac{4\pi}{c}\nabla\times\vec{J}$$

Seite 71: $\underbrace{\nabla(\nabla\cdot\vec{B})}_{=0} - \nabla^2\vec{B}$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^2\vec{B} = -\frac{4\pi}{c}\nabla\times\vec{J}$$

Wieder wie die Poisson-Gleichung!

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3x' \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, \nabla'\times\vec{J}(\vec{x}')$$

Partielle Integration ($\vec{J}$ verschwindet auf der Oberfläche):

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, \varepsilon^{ijk}\partial'_j J^k$$

$$= -\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i \int_V d^3\vec{x}' \left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\varepsilon^{ijk}J^k$$

$$= -\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{x^j - x'^j}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \, \varepsilon^{ijk}J^k$$

$$= -\frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\times\vec{J}(\vec{x}')$$

1791–1841

„Biot-Savartsches Gesetz"

1774–1862

* Vergleich mit (i):

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}' \, \nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\int_V d^3\vec{x}'\left(\partial_j\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)J^k(\vec{x}')$$

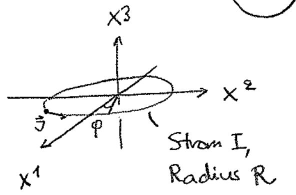
$$= -\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\,\varepsilon^{ijk}\int_V d^3\vec{x}' \, \frac{x^j-x'^j}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,J^k(\vec{x}')$$

$$= -\frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\times\vec{J}(\vec{x}')$$

OK!

**Beispiel:** Ringstrom durch einen sehr dünnen Draht:

Gesucht wird $\vec{B}(\vec{x})$ für $\vec{x} = x^3 \cdot \vec{e}_3$.




Seite 55: $\quad \vec{j} = \vec{n}\,\dfrac{\Delta I}{\Delta f}$ $\qquad$ Linienelement $= \vec{n}\cdot\Delta s$

$$\Rightarrow \; d^3x'\,\vec{j} = \vec{n}\,\frac{\Delta I}{\Delta f}\cdot \Delta f\,\Delta s = \Delta I \cdot \underbrace{d\vec{x}'}$$

Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{I}{c}\int_{\text{Draht}} \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \times d\vec{x}'$$

$$= -\frac{I}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \times \frac{d\vec{x}'}{d\varphi}$$

Hier:

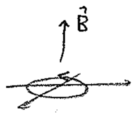
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{d\vec{x}'}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = x^3\,\vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{x}-\vec{x}' = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ x^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad |\vec{x}-\vec{x}'| = \sqrt{R^2+(x^3)^2}$$

$$(\vec{x}-\vec{x}') \times \frac{d\vec{x}'}{d\varphi} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R\cos\varphi & -R\sin\varphi & x^3 \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3 R\cos\varphi \\ -x^3 R\sin\varphi \\ -R^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{x}) = +\frac{I}{c}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left[R^2+(x^3)^2\right]^{3/2}} \begin{pmatrix} x^3 R\cos\varphi \\ x^3 R\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{I}{c}\cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{\left[R^2+(x^3)^2\right]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$




———— ∘ ————

# Kraft zwischen zwei Stromkreisen


Seite 57:

Lorentz - Kraftdichte $\vec{f}_L = \frac{1}{c}\,\vec{J}\times\vec{B}$ (das elektrische Feld wird vernachlässigt).

Von Stromkreis 1 auf Stromkreis 2 ausgeübte Kraft:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\;\vec{J}_2(\vec{x})\times\vec{B}_1(\vec{x})$$

siehe Bemerkung unten

Biot-Savart auf Seite 72

$$= \frac{1}{c^2}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{x}'\;\vec{J}_2(\vec{x})\times\left[\left(\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\times\vec{J}_1(\vec{x}')\right]$$

Benutze Identität $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ (Blatt 10)

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{x}'\;\vec{J}_1(\vec{x}')\cdot\vec{J}_2(\vec{x})\;\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$- \frac{1}{c^2}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{x}'\;\left[\vec{J}_2(\vec{x})\cdot\left(\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right]\vec{J}_1(\vec{x}')$$

Hier ist

$$\int_V d^3\vec{x}\;\vec{J}_2(\vec{x})\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \int_V d^3\vec{x}\sum_{i=1}^{3} J_2^i(\vec{x})\,\partial_i\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \int_V d^3\vec{x}\sum_{i=1}^{3}\left[\partial_i\left(J_2^i(\vec{x})\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\partial_i J_2^i(\vec{x})\right]$$

$$= \underbrace{\int_V d^3\vec{x}\;\nabla\cdot\left(\vec{J}_2(\vec{x})\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{\text{Gauß} \Rightarrow \text{Oberflächenintegral} \Rightarrow 0} - \int_V d^3\vec{x}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\underbrace{\nabla\cdot\vec{J}_2(\vec{x})}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{x}'\;\vec{J}_1(\vec{x}')\cdot\vec{J}_2(\vec{x})\;\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}\,.$$

Bemerkungen:

* $\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$ (Seite 60; $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$)

* für dünne Drähte: $d^3\vec{x}\;\vec{J}_2(\vec{x}) \to I_2\,d\vec{x}$ (Seite 73),

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2}\oint\oint d\vec{x}'\cdot d\vec{x}\;\;\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,.$$

* die fundamentalen Objekte sind „nichtlokal",
d.h. Stromkreise (statt Punktladungen).