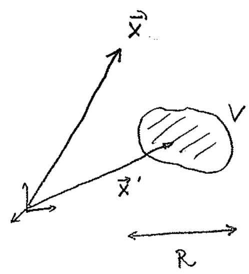
5.3 Multipolentwicklung



Wir kehren nun zu dem Problem zurück, dass die Ladungsdichte „lokalisiert" ist:
Wie sieht das Skalarpotential an Abständen $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg R$ aus?

Die allgemeine Antwort: $\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$.

Für $|\vec{x}'| \lesssim R$, $|\vec{x}| \gg R$ können wir das Ergebnis durch eine Taylor-Entwicklung in $\vec{x}'$ vereinfachen!

$$r := |\vec{x}|$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{3} x^{i\prime} \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x^{i\prime} x^{j\prime} \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{1}{r} + \dots$$

Hier ist:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^i}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{1}{r} = -\frac{\delta^{ij}}{r^3} + 3\frac{x^i}{r^4}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\left((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\delta^{ij}}{r^3} + \frac{3x^i x^j}{r^5}$$

Insgesamt also:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3}\frac{x^i x^{i\prime}}{r^3} + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{3x^i x^j - r^2\delta^{ij}}{2r^5}\cdot x^{i\prime}x^{j\prime} + \dots$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3}\frac{x^i}{r^3}x^{i\prime} + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{3x^i x^j - r^2\delta^{ij}}{2r^5}\left(x^{i\prime}x^{j\prime} - \frac{1}{3}\delta^{ij}|\vec{x}'|^2\right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

Das Skalarpotential wird zum

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r^3} + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{3x^i x^j - r^2\delta^{ij}}{2r^5}\,Q^{ij} + O\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

wobei die kartesischen Multipolmomente definiert sind als

$$Q := \int_V d^3\vec{x}'\,\rho(\vec{x}') = \text{die Gesamtladung} \quad (\text{„Monopol"})$$

$$\vec{p} := \int_V d^3\vec{x}'\,\vec{x}'\,\rho(\vec{x}') = \text{das (elektrische) Dipolmoment}$$

$$Q^{ij} := \int_V d^3\vec{x}'\left(x^{i\prime}x^{j\prime} - \frac{1}{3}\delta^{ij}|\vec{x}'|^2\right)\rho(\vec{x}') = \text{der Quadrupoltensor}$$

Notabene: $\sum_{i=1}^{3} Q^{ii} = 0$ (spurlos).

Beispiele

(i) eine kugelsymmetrische Ladungsdichte $\rho = \rho(|\vec{x}'|)$

* $Q \neq 0$

Substitution $\vec{x}' \to -\vec{x}'$

* $\vec{p} = \int_V d^3\vec{x}' \, \vec{x}' \, \rho(|\vec{x}'|) = \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x}' \left[\vec{x}' \rho(|\vec{x}'|) + \vec{x}' \rho(|\vec{x}'|) \right]$

$= 0 .$

Substitution $x^{j'} \to -x^{j'}$

* $Q^{i \neq j} = \int_V d^3\vec{x} \, x^{i'} x^{j'} \rho(|\vec{x}'|) = \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{x}' \, x^{i'} \left[x^{j'} \rho(|\vec{x}'|) + x^{j'} \rho(|\vec{x}'|) \right]$

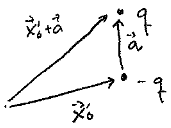
$= 0 .$

D.h., Q^{ij} ist diagonal (vgl. Trägheitstensor, Seite 38).

Aus Symmetriegründen gilt $Q^{11} = Q^{22} = Q^{33}$.

Aber Spur $= Q^{11} + Q^{22} + Q^{33} = 0 \Rightarrow Q^{ij} = 0$!

(ii)

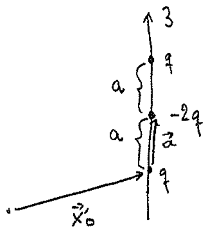


$$\rho(\vec{x}') = q \left[\delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}_0' - \vec{a}) - \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}_0') \right]$$

* $Q = q - q = 0$

* $\vec{p} = \int d^3\vec{x}' \, \vec{x}' \, \rho(\vec{x}') = q \left[\vec{x}_0' + \vec{a} - \vec{x}_0' \right] = q\vec{a} \neq 0 .$

(iii)



* $Q = q - 2q + q = 0$

* $\vec{p} = q \left[\vec{x}_0 - 2(\vec{x}_0 + \vec{a}) + \vec{x}_0 + 2\vec{a} \right] = 0$

* Q^{ij} diagonal aus Symmetriegründen

$Q^{11} = Q^{22}$ —— " ——

$Q^{11} + Q^{22} + Q^{33} = 0 \Rightarrow Q^{11} = Q^{22} = -\frac{1}{2} Q^{33}$

$$Q^{33} = \int d^3\vec{x}' \left[(x^{3'})^2 - \frac{1}{3} |\vec{x}'|^2 \right] \rho(\vec{x}')$$

$$= \int d^3\vec{x}' \left[\frac{2}{3} (x^{3'})^2 - \frac{1}{3} \left((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 \right) \right] \rho(\vec{x}')$$

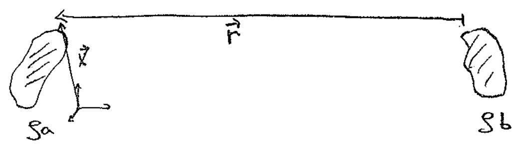
$\propto q - 2q + q = 0$

$$= \frac{2}{3} \cdot q \cdot \left[(x_0^{3'})^2 - 2(x_0^{3'} + a)^2 + (x_0^{3'} + 2a)^2 \right]$$

$$= \frac{2}{3} q \left[(x_0^{3'})^2 - 2(x_0^{3'})^2 - 4a x_0^{3'} - 2a^2 + (x_0^{3'})^2 + 4a x_0^{3'} + 4a^2 \right]$$

$$= \frac{4}{3} q a^2 \neq 0 .$$

Wechselwirkung zwischen zwei lokalisierten Ladungsdichten



Betrachten wir die Potentialenergie des Systems (Seite 61):

$$V = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\; \rho(\vec{x})\,\phi(\vec{x}) = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\,\left[\rho_a(\vec{x})+\rho_b(\vec{x})\right]\left[\underbrace{\phi_a(\vec{x})}_{\text{verursacht durch } \rho_a}+\phi_b(\vec{x})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\,\Big[\underbrace{\rho_a\phi_a}_{\text{„Selbstenergie" vom System a}} + \underbrace{\rho_b\phi_b}_{\text{„Selbstenergie" vom System b}} + \underbrace{\rho_a\phi_b + \rho_b\phi_a}_{\text{„Wechselwirkung"}}\Big]$$

Es gilt:

$$\int d^3\vec{x}\; \rho_b(\vec{x})\,\phi_a(\vec{x}) \overset{\text{Poisson}}{=} -\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\; \nabla^2\phi_b(\vec{x})\;\phi_a(\vec{x})$$

$\nabla^2\phi_b\phi_a - \phi_b\nabla^2\phi_a = \nabla\cdot\left[\nabla\phi_b\phi_a - \phi_b\nabla\phi_a\right]$ + Gaußer Satz + $R\to\infty$ wie auf Seite 62 $\Rightarrow$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}\; \phi_b(\vec{x})\,\nabla^2\phi_a(\vec{x})$$

$$\overset{\text{Poisson}}{=} \int d^3\vec{x}\; \phi_b(\vec{x})\,\rho_a(\vec{x}).$$

Die Potentialenergie der Wechselwirkung lautet also

$$V_W = \int d^3\vec{x}\; \rho_a(\vec{x})\,\phi_b(\vec{x}).$$

Taylor-Entwicklung von $\phi_b(\vec{x})$:

$$\phi_b(\vec{x}) = \phi_b(\vec{0}) + \vec{x}\cdot\nabla\phi_b(\vec{0}) + \frac{1}{2}\sum_{ij} x^i x^j\, \partial_i\partial_j\,\phi_b(\vec{0}) + \dots \qquad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \phi_b(\vec{0}) - \vec{x}\cdot\vec{E}_b(\vec{0}) + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(x^i x^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}|\vec{x}|^2\right)\partial_i\partial_j\,\phi_b(\vec{0})$$

$$+ \frac{1}{6}|\vec{x}|^2\,\underbrace{\nabla^2\phi_b(\vec{0})}_{=0!} + \dots \qquad \text{(Ladungen des Systems b anderswo!)}$$

$$\Rightarrow V_W = Q_a\,\phi_b(\vec{0}) - \vec{p}_a\cdot\vec{E}_b(\vec{0}) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_a^{ij}\,\partial_i E_b^j(\vec{0}) + \dots$$

minimal für $\vec{p}_a \parallel \vec{E}_b$!

Falls weiterhin ρ_a und ρ_b „reine Dipole" sind $(Q_a = Q_b = 0)$, und wir für ϕ_b Multipolentwicklung benutzen, gilt

$$\phi_b = \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}_b}{r^3},$$

$$\vec{E}_b = -\nabla\phi_b = -\frac{\vec{p}_b}{r^3} + 3\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}_b}{r^5}\,\vec{r},$$

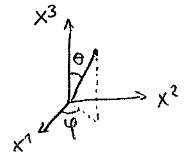
$$V_W = -\vec{p}_a\cdot\vec{E}_b = \frac{\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b - 3\,\vec{n}\cdot\vec{p}_a\;\vec{n}\cdot\vec{p}_b}{r^3}, \qquad \vec{n} := \frac{\vec{r}}{r}$$

„Dipolwechselwirkung"

— o —

Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Auf Seite 67 definierten wir „kartesische Multipolmomente"; es ist aber auch möglich, die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten zu formulieren. Hier werden die Hauptergebnisse ohne Herleitung gegeben.



Seien $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$ die üblichen Kugelkoordinaten.

Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$; $\ell = 0,1,\dots$; $m = -\ell,\dots,\ell$; bilden eine vollständige Menge von orthonormierten Funktionen.

Vollständigkeit heißt: Jede (differenzierbare usw.) Funktion $f(\theta,\varphi)$ läßt sich darstellen als konvergente Summe

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi).$$

Orthonormalität heißt:

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{\ell m} = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi) f(\theta,\varphi).$$

Beispiele:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \quad \dots$$

Wunderformel:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1}\,\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\, Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

wobei $r_< := \min(r,r')$; $r_> := \max(r,r')$.

Multipolentwicklung: Einsatz von Wunderformel in

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}'\, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad \text{mit } |\vec{x}| \gg \max_{\vec{x}'\in V} |\vec{x}'|$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\; q_{\ell m}\, \frac{Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{r^{\ell+1}}$$

mit

$$q_{\ell m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \int d^3\vec{x}'\, (r')^{\ell}\, Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\, \rho(\vec{x}').$$

— o —