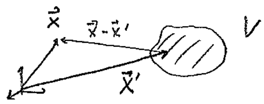
1793 - 1841

## 5.2 Greensche Funktionen

Im Kapitel 5.1 haben wir das Skalarpotential $\phi(\vec{x})$ mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes bestimmt, mit der Antwort (Seite 60)

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \; \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, .$$




Betrachten wir jetzt dasselbe Problem durch die Poisson-Gleichung (Seite 59)

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x}) \, .$$

Schreibe die rechte Seite als

$$-4\pi\rho(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \left[-4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\right] \rho(\vec{x}') \, .$$

Sei $G(\vec{x},\vec{x}')$, genannt eine Greensche Funktion, die Lösung von

$$\nabla^2_{\vec{x}}\, G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \, . \qquad (*)$$

Dann ist

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \; G(\vec{x},\vec{x}')\, \rho(\vec{x}')$$

eine Lösung der Poisson-Gleichung! [Beweis: nehme $\nabla^2_{\vec{x}}$ und benutze (*).]

Behauptung 1:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad \text{ist Lösung von } (*) .$$

Beweis 1:

Schreibe $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{r}$, und drücke $\vec{r}$ durch Kugelkoordinaten aus.
Um alles regulär zu halten, ersetze weiterhin

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{(\vec{x}-\vec{x}')^2+\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \quad \text{mit } \varepsilon \to 0^+ .$$

Dann ist

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \overset{!}{\to} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\left(-\frac{r}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}} + 3\frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{2}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}} = -\frac{3\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}} \, .$$

Für $r \neq 0$ gibt $\varepsilon \to 0^+$ null, genau wie in (*).
Auf der anderen Seite ist

$$\int_{|\vec{r}|\leq\delta} d^3\vec{r} \; \frac{-3\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}} = -12\pi\,\varepsilon^2 \int_0^\delta dr\, r^2 \frac{1}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}}$$

$$= -4\pi \left[\frac{r^3}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\right]_0^\delta$$

$$= -4\pi \frac{\delta^3}{(\delta^2+\varepsilon^2)^{3/2}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} -4\pi \, . \qquad \square$$

**Behauptung 2:** Die Lösung von $(*)$ ist im Allgemeinen <u>nicht</u> eindeutig.

**Beweis 2:** Seien $G_1$ und $G_2$ zwei Lösungen, mit $G_1 - G_2 =: F$.
Dann gilt:

$$\nabla^2_{\vec{x}} F = \nabla^2_{\vec{x}} (G_1 - G_2) = -4\pi \left[ \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \right] = 0 .$$

Falls es also nichttriviale <u>harmonische Funktionen</u> gibt (vgl. Seite 59), mit

$$\nabla^2_{\vec{x}} F(\vec{x}, \vec{x}') = 0 ,$$

ist die Behauptung bewiesen worden. Beispiel: $\sin(x^1) e^{x^2}$.

**Behauptung 3:** <u>Im $\mathbb{R}^3$</u> ist die einzige überall <u>endliche</u> harmonische Funktion gleich null.

**„Begründung":** Schreibe $f(\vec{x}) := F(\vec{x}, \vec{x}')$ mit Ansatz* $f(\vec{x}) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$.

$$\Rightarrow \quad \nabla^2_{\vec{x}} f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f_1(x) f_2(y) f_3(z) = 0 \qquad \Big| \div f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

$$\underbrace{\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2}}_{\text{Funktion von } x} + \underbrace{\frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dy^2}}_{y} + \underbrace{\frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{dz^2}}_{z} = 0$$

$\Rightarrow$ alle drei Funktionen müßen <u>Konstanten</u> sein.
Mindestens eine davon muß <u>positiv</u> sein.

$$\Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2} = \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 f_1}{dx^2} = \alpha f_1$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \underbrace{A \exp(\sqrt{\alpha}\, x)}_{\substack{\text{unendlich} \\ \text{für } x \to +\infty}} + \underbrace{B \exp(-\sqrt{\alpha}\, x)}_{\substack{\text{unendlich} \\ \text{für } x \to -\infty}} \qquad \lightning$$

**Zwischenbilanz:**

Falls wir die Ladungsdichte überall im Raum kennen, ist $G(\vec{x}, \vec{x}') = \dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ die einzige mögliche Greensche Funktion, und wir finden das Ergebnis

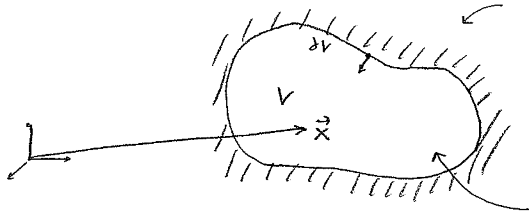
$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3 x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

wieder.

---

* Wie eine Fourier-Komponente: $\tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \underbrace{\tilde{f}(\vec{k}) e^{ik^1 x}}_{f_1} \cdot \underbrace{e^{ik^2 y}}_{f_2} \cdot \underbrace{e^{ik^3 z}}_{f_3}$.

## Eine neue physikalische Fragestellung: „Randwertproblem"




eine „komplizierte" Materie, z.B. Metall mit Oberflächenladungen

ein „einfaches" Gebiet, wo wir die Lösung kennen wollen.

$\Rightarrow$ Welche Informationen braucht man an der Oberfläche $\partial V$, um die Poisson-Gleichung innerhalb des Volumens lösen zu können?

Zwei Arten von Randbedingungen:

1805 - 1859 Dirichletsche: $\quad \phi(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V}$ sei gegeben.

1832 - 1925 Neumannsche: $\quad \partial_n \phi(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V} := \vec{n}\cdot\nabla\phi(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V}$

$$= -\vec{n}\cdot\vec{E}(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V} \quad \text{sei gegeben.}$$

Behauptung 4: Die beiden genannten Randbedingungen führen zu einer eindeutigen Lösung der Poisson-Gleichung*. (Die Existenz einer Lösung wird angenommen; vgl. Seite 66.)

Hilfsmittel: die „erste Greensche Identität"

$$f,g \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot(f\nabla g) = \nabla f\cdot\nabla g + f\,\nabla^2 g$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x}\,\left[ f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g \right] = \int_V d^3\vec{x}\ \nabla\cdot(f\nabla g)$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot(f\nabla g)$$

$$= \int_{\partial V} |d\vec{f}|\ f\,\partial_n g\,.$$

---

* abgesehen von einer physikalisch unwichtigen additiven Konstanten.

**Beweis 4:**

Seien $\phi_1$ und $\phi_2$ Lösungen der Poisson-Gleichung, und $U := \phi_1 - \phi_2$.

Es gilt $\nabla^2 U(\vec{x}) = 0 \quad \forall \; \vec{x} \in V$ (Laplace)

sowie $U(\vec{x})\big|_{\vec{x} \in \partial V} = 0$ (Dirichlet)

oder $\partial_n U(\vec{x})\big|_{\vec{x} \in \partial V} = 0$ (Neumann).

Betrachte erste Greensche Identität mit $f = g = U$:

$$\int_V d^3\vec{x} \, \Big[ \underbrace{U \nabla^2 U}_{\substack{=0 \\ (\text{Laplace})}} + |\nabla U|^2 \Big] = \int_{\partial V} |d\vec{f}| \underbrace{U \partial_n U}_{\substack{=0 \\ (\text{Dirichlet oder Neumann})}}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x} \, \underbrace{|\nabla U|^2}_{\geq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla U = 0 \quad \forall \; \vec{x} \; !$$

D.h., $\phi_1 = \phi_2 +$ Konstante! (Mit Dirichlet ist Konstante wegen Randbedingung sogar null.)

1791 - 1867

**Beispiel:** Faradayscher Käfig

= ein ladungsfreies Volumen, eingeschlossen von einer Metallfläche. Im Metall gibt es freie Elektronen $\Rightarrow$ im statischen Fall muß $\vec{E} = 0$ gelten $\Rightarrow$ $\phi$ ist Konstante im Metall, sowie an $\partial V$.

Was passiert innerhalb des Volumens?

Eine Lösung von $\nabla^2 \phi = 0 \;\; \forall \, \vec{x} \in V$, mit $\phi|_{\vec{x} \in \partial V} =$ Konstante, ist $\phi =$ Konstante $\forall \, \vec{x} \in V$.

Da die Lösung eindeutig ist, ist dies auch schon die gesuchte Lösung! Hieraus folgt $\vec{E} = 0$ im Faradayschen Käfig.

**Bemerkung zur Existenz der Lösung im Allgemeinen Fall** (ohne Beweis).

In einem endlichen Volumen sind harmonische Funktionen $F(\vec{x}, \vec{x}')$ nichttrivial. Damit ist die Greensche Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$ nicht mehr eindeutig. Mit einer angemessenen Wahl von $G(\vec{x}, \vec{x}')$ kann eine explizite Lösung für gegebene Dirichletsche bzw. Neumannsche Randbedingungen konstruiert werden; d.h., eine Lösung existiert!