5. Elektrostatik

Wir betrachten zuerst den statischen Limes, d.h. keine Zeitabhängigkeit ($\partial_t = 0$).
Die Maxwell-Gleichungen zerfallen in zwei Gruppen:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla\times\vec{E} = 0 \qquad \text{Elektrostatik} \quad (\text{M I} + \text{M III})$$

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad , \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{Magnetostatik} \quad (\text{M II} + \text{M IV})$$

Wir fangen mit der ersten Gruppe an.

5.1 Skalarpotential, Coulomb-Kraft, Feldenergie

$\boxed{\nabla\times\vec{E} = 0}$ Seite 6: für einfach zusammenhängende Gebiete gilt

$$\vec{E} = -\nabla\phi \, ,$$

wobei

$$\phi(\vec{x}) := \phi(\vec{x}_0) - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}'\cdot\vec{E}(\vec{x}')$$

das elektrische Potential bzw. Skalarpotential heißt.

Das Integral ist unabhängig vom Integrationsweg.

$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho}$ (i) Einsatz von $\vec{E} = -\nabla\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho} \qquad \text{Poisson-Gleichung} \quad (1781-1840)$$

Für Vakuum ($\rho = 0$):

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0} \qquad \text{Laplace-Gleichung} \quad (1749-1827)$$

(Lösungen der Laplace-Gleichung werden harmonische Funktionen genannt, und spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle.)

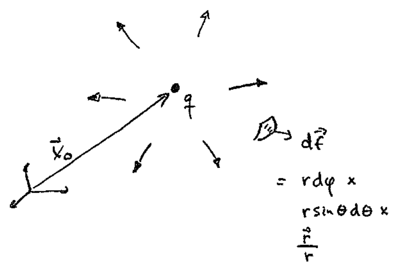
(ii) Elektrischer Fluss durch eine Oberfläche ∂V:

$$\int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} \underset{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int d^3x \, \nabla\cdot\vec{E}$$

$$\overset{\text{Maxwell I}}{=} 4\pi \int d^3x \, \rho$$

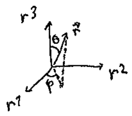
$$= 4\pi \underbrace{Q_V}_{\text{Gesamtladung im } V} \qquad \text{Gaußsches Gesetz} \quad (1777-1855)$$

(ii) ⇒ Elektrisches Feld und Skalarpotential einer Punktladung



Aus Symmetriegründen: $\vec{E}(\vec{x}) = E(|\vec{x}-\vec{x}_0|)\,\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$.

Bezeichne $\vec{x}-\vec{x}_0 =: \vec{r}$, und wähle V als Kugel mit Radius r um den Punkt $\vec{x}_0$.



Gaußsches Gesetz:

$$4\pi q = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\; r^2\, \frac{\vec{r}}{r} \cdot E(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Kugelkoordinaten

$$= 4\pi\, r^2\, E(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{q}{r^2}}\,, \qquad \boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q\,(\vec{x}-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}}$$

Das entsprechende Skalarpotential: $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{r} = \frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$.

Begründung: in Kugelkoordinaten gilt $\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$;
weil ϕ nur von r abhängt, bekommen wir

$$-\nabla \frac{q}{r} = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right) = \frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r = \frac{q\vec{r}}{r^3} \qquad \square.$$

Elektrisches Feld und Skalarpotential vieler Punktladungen

Maxwell-Gleichungen sind linear in Feldern und Ladungen ⇒
Sind $\rho_1, \vec{E}_1, \phi_1$ und $\rho_2, \vec{E}_2, \phi_2$ Lösungen, dann ist $\vec{E}_1+\vec{E}_2$, $\phi_1+\phi_2$ Lösung für die Ladungsdichte $\rho_1+\rho_2$ (Superpositionsprinzip).

Wenn wir also Punktladungen q_a an Orten $\vec{x}_a$ haben, dann gilt

$$\phi(\vec{x}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{x}-\vec{x}_a|}\,,$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_a q_a \frac{\vec{x}-\vec{x}_a}{|\vec{x}-\vec{x}_a|^3}\,.$$

Im Kontinuumlimes (vgl. Seite 35):

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x'\, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,,$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V d^3x'\, \rho(\vec{x}')\, \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,.$$

(Wähle hier vorsichtshalber $\vec{x}$ außerhalb des Volumens V.)

1736-1806

Coulomb-Kraft

(Geschichtlich der Anfangspunkt, aber für uns jetzt eine abgeleitete Größe!)

Gemäß Lorentz-Kraft im statischen Limes ($\vec{v}=0$) bzw. für $\vec{B}=0$ ist Kraft auf Ladung q_a am Ort $\vec{x}_a$

$$\vec{F}_a(\vec{x}_a) = q_a \vec{E}_a(\vec{x}_a),$$

wobei $\vec{E}_a$ das von q_a selbst erzeugte Feld nicht enthält.
Seite 60:

$$\vec{E}_a(\vec{x}_a) = \sum_{b\neq a} q_b \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_b}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_a(\vec{x}_a) = \sum_{b\neq a} q_a q_b \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_b}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|^3}.$$ Coulomb-Kraft

Diese Kraft ist konservativ (weil $\nabla_a \times \vec{E}_a = 0$ gilt), und kann deshalb als

$$\vec{F}_a(\vec{x}_a) = -\nabla_a V$$

nabla bzgl. $\vec{x}_a$

ausgedrückt werden (Seite 6), wobei V die Potentialenergie bezeichnet.

Behauptung:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} \frac{q_a q_b}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|} = \frac{1}{2}\sum_a q_a \phi_a(\vec{x}_a).$$

Beweis:

$$-\nabla_a V = -\nabla_a \frac{1}{2}\sum_{c\neq d}\frac{q_c q_d}{|\vec{x}_c-\vec{x}_d|}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{c\neq d} q_c q_d \underbrace{\nabla_a \frac{1}{|\vec{x}_c-\vec{x}_d|}}_{-\delta_{ca}\frac{\vec{x}_c-\vec{x}_d}{|\vec{x}_c-\vec{x}_d|^3} - \delta_{da}\frac{\vec{x}_d-\vec{x}_c}{|\vec{x}_c-\vec{x}_d|^3}}$$

$$= +\frac{1}{2}\sum_{d\neq a} q_a q_d \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_d}{|\vec{x}_a-\vec{x}_d|^3} + \frac{1}{2}\sum_{c\neq a} q_a q_c \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_c}{|\vec{x}_a-\vec{x}_c|^3}$$

umbenne $\begin{cases} c\to b \\ d\to b\end{cases}$

$$= \sum_{b\neq a} q_a q_b \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_b}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|^3}. \qquad \square$$

— ∘ —

Im Kontinuumlimes: $\boxed{V = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\, \rho(\vec{x})\,\phi(\vec{x})}$.

Feldenergie

Aufgabe: ausdrücke $V = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x}\ \rho(\vec{x})\phi(\vec{x})$ durch das elektrische Feld $\vec{E}$!

Hier wird über den ganzen Raum integriert; z. B. können wir zuerst eine große Kugel nehmen, mit Radius R, und am Ende $R \to \infty$ schicken.

Also:

$$V \overset{(MI)}{=} \frac{1}{2} \int_{|\vec{x}| \le R} d^3\vec{x}\ \frac{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x})}{4\pi} \cdot \phi(\vec{x})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{E})\phi &= (\partial_i E^i)\phi \\ &= \partial_i (E^i \phi) - E^i \partial_i \phi \\ &= \nabla \cdot (\vec{E}\phi) - \vec{E} \cdot \nabla\phi \end{aligned}$$

$$\overset{\vec{E} = -\nabla\phi \text{ im zweiten Term}}{=} \frac{1}{8\pi} \int_{|\vec{x}| \le R} d^3\vec{x} \left[\nabla \cdot (\vec{E}\phi) + \vec{E}^2 \right]$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{8\pi} \left[\int_{|\vec{x}| = R} d\vec{f} \cdot (\vec{E}\phi) + \int_{|\vec{x}| \le R} d^3\vec{x}\ \vec{E}^2 \right]$$

Für sehr große R sind alle Ladungen innerhalb der Oberfläche $\Rightarrow$ $\phi \propto \frac{1}{R}$, $|\vec{E}| \propto \frac{1}{R^2}$, $|d\vec{f}| = R^2 d\Omega$.

Damit gilt

$$\lim_{R \to \infty} \int_{|\vec{x}| = R} d\vec{f} \cdot (\vec{E}\phi) \propto \lim_{R \to \infty} 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{R} = 0,$$

und

$$\boxed{V = \frac{1}{8\pi} \int d^3\vec{x}\ \vec{E}^2(\vec{x})}$$

Interpretation:

Die potentielle Energie steckt im elektrischen Feld; die <u>Energiedichte des elektrischen Feldes</u> lautet

$$e(\vec{x}) := \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{x}).$$