4. Grundbegriffe der Elektrodynamik

Wir geben jetzt Massenpunkten eine zweite Eigenschaft neben ihrer Masse: elektrische Ladung. Ladungen erzeugen elektrische und magnetische Felder. Die Felder wirken wiederum auf Ladungen, indem sie Kräfte auf diese verursachen. Es handelt sich also um ein gekoppeltes System von Massenpunkten und Feldern!

Punktladungen

Massenpunkte am $\vec{x}_1, \vec{x}_2$; Massen m_1, m_2; Ladungen q_1, q_2.

Gesamtmasse: $M := m_1 + m_2$ (vgl. Seite 35)

Gesamtladung: $Q := q_1 + q_2$

Ladungsdichte

(vgl. Massendichte, Seite 35)

ΔV = Volumen um den Punkt $\vec{x}$, Δq = Ladung im ΔV

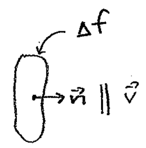
$$\rho(\vec{x}) := \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Gesamtladung im Volumen V: $\quad Q = \int_V d^3\vec{x}\, \rho(\vec{x})$.

Für Punktladungen:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a).$$

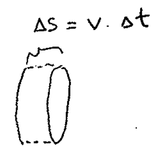
Stromdichte



Strom durch Fläche Δf: $\quad \Delta I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{\Delta q}}{\Delta t}$

Ladung durch Fläche im Zeitintervall Δt.

Stromdichte:

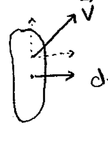


$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \vec{n} \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta f} \\
&= \vec{n} \lim_{\Delta f \to 0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta f\, \Delta t} \\
&= \vec{n} \lim_{\Delta f, \Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\Delta q}{\Delta f\, \Delta s}}_{\rho} \cdot \underbrace{\frac{\Delta s}{\Delta t}}_{v} \\
&= \rho(\vec{x})\, \vec{v}(\vec{x})
\end{aligned}$$

(vgl. Seite 53)

Falls die geladenen Teilchen sich nicht senkrecht auf das Flächenelement bewegen, wird der Strom durch die senkrechte Komponente gegeben:

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot \Delta f = \vec{j} \cdot d\vec{f}$$



$$d\vec{f} = \Delta f \cdot \vec{n}$$

Die elektrische Ladung ist Erhaltungsgröße (wie Teilchenzahl auf Seite 53)

Genauer: Die Ladung in einem Volumen V kann sich nur dadurch ändern, dass Ladung durch die Oberfläche ∂V hinein- oder hinausfließt.

Strom durch Fläche F:

$$I = \int_F dI = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

Ladung innerhalb einer abgeschlossenen Fläche wird entsprechend kleiner:

$$\frac{dQ}{dt} = -I$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{x}\, \rho(\vec{x}, t) = - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j} \overset{\text{Gaußscher Satz}}{=} - \int_V d^3\vec{x}\, \nabla \cdot \vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_V d^3\vec{x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) = 0 \, .$$

Dieses gilt für ein beliebiges Volumenelement, auch infinitesimal klein

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x},t) = 0 \qquad \forall\, \vec{x}, t \, .}$$

Ladungsdichte ρ ist ein „Skalarfeld", Stromdichte ein „Vektorfeld".

Maxwell-Gleichungen

1831–1879

Ladungen und Ströme erzeugen das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x},t)$ und die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{x},t)$ laut den Maxwellschen Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}}$$

(M I)
(M II)
(M III)
(M IV)

(keine universelle Bezeichnungen wie Newton I–III !)

Hier ist c = Konstante = Lichtgeschwindigkeit := $299792458 \, \frac{m}{s}$.

Bemerkungen:

(i) Spezifische Einheiten wurden benutzt; vgl. Seite 58.

(ii) (MI)-(MIV) werden oft als „Maxwell-Gleichungen im Vakuum" bezeichnet. Sie gelten jedoch sehr allgemein, auch in Materie, falls richtig (d.h. wörtlich) interpretiert.

(iii)
$$\rho \overset{(MI)}{=} \frac{1}{4\pi} \nabla\cdot\vec{E} \,, \qquad \vec{j} \overset{(MII)}{=} \frac{1}{4\pi}\left(c\nabla\times\vec{B} - \dot{\vec{E}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = \frac{1}{4\pi}\left[\cancel{\nabla\cdot\dot{\vec{E}}} + c\,\underbrace{\nabla\cdot\nabla\times\vec{B}} - \cancel{\nabla\cdot\dot{\vec{E}}} \right] = 0 \qquad \text{OK!}$$

$$\partial_i \varepsilon^{ijk} \partial_j B^k = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{ijk}\partial_i\partial_j + \varepsilon^{jik}\partial_j\partial_i\right) B^k = 0 .$$

Antisymmetrie von ε^{ijk}

1853-1928

Lorentz-Kraft

Eine Ladung q am Ort $\vec{x}$ zur Zeit t, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, erfährt dort die Kraft

$$\boxed{\vec{F}_L = q\left[\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}(\vec{x},t) \right] .}$$

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ enthalten dabei <u>nicht</u> die Beiträge von q selber.

Mit Ladungsdichte $\rho(\vec{x},t)$ und Stromdichte $\vec{j}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\,\vec{v}(\vec{x},t)$:

$$\text{Kraftdichte} = \vec{f}_L := \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta\vec{F}_L}{\Delta V}$$

$$= \rho(\vec{x},t)\,\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\,\vec{j}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t) .$$

Diese Kraft bewegt wiederum die geladenen Teilchen:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_L + \text{andere Kräfte} .$$

—— o ——

Einheiten

(ein leidiges und verwirrendes Thema) [Jackson, Anhang A]

Wir benutzen das Gaußsche bzw. cgs (cm, g, s) Maßsystem.

Dabei werden keine zusätzliche Einheiten für die Elektrodynamik eingeführt, sondern man definiert die Ladung durch die mechanischen Einheiten cm, g, s.

$$\text{MI}: \quad \frac{[\vec{E}]}{[x]} = \frac{[q]}{[x]^3} \quad \Rightarrow \quad [\vec{E}] = \frac{[q]}{[x^2]}$$

$$\text{Lorentz}: \quad [\vec{F}] = \left[m \frac{x}{t^2}\right] = [q][\vec{E}] = \frac{[q^2]}{[x^2]} \quad \Rightarrow \quad [q^2] = \left[m \frac{x^3}{t^2}\right]$$

$$[\vec{E}] = \left[\frac{m^{1/2}}{x^{1/2} t}\right]$$

Kennzeiche Größen in einem anderen Maßsystem als den Gaußschen mit $*$:

$$\vec{E} = \sqrt{\Psi \varepsilon_0}\, \vec{E}^* \qquad \vec{B} = \sqrt{\frac{\Psi}{\mu_0}}\, \vec{B}^*$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\Psi \varepsilon_0}}\, q^* \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{\Psi \varepsilon_0}}\, \rho^* \qquad \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{\Psi \varepsilon_0}}\, \vec{j}^*$$

Die Lorentz-Kraft wird damit zu

$$\vec{F} = q^* \left(\vec{E}^* + \frac{\vec{v}}{c\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \times \vec{B}^* \right)$$

Einige Maßsysteme:

„Dielektrizitätskonstante" (ε_0)

„Permeabilität des Vakuums" (μ_0)

	ε_0	μ_0	Ψ
Gauß	1	1	1
(elektrostatisch (esu / esE)	1	$\frac{1}{c^2}$	1)
(elektromagnetisch (emu / emE)	$\frac{1}{c^2}$	1	1)
1850 – 1925 Heaviside - Lorentz	1	1	4π
SI	$\frac{1}{c^2 \mu_0}$	$\frac{4\pi}{10^7} \cdot \frac{N}{A^2}$	4π

N = Newton $= \frac{J}{m} = \frac{Ws}{m}$

W = Watt = VA ; V = Volt , A = Ampere

Nur A ist „unabhängig" und neu!

——— o ———