3.3 Phasenraum, Liouvillescher Satz (1809–1882), Chaos

Gegeben sei ein System mit s Freiheitsgraden, verallgemeinerten Koordinaten q_α, kanonischen Impulsen p_α. Der $2s$-dimensionale Raum mit Punkten

$$\Gamma := (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)$$

heißt <u>Phasenraum</u> des Systems (vgl. Seite 43).

Ein Punkt im Phasenraum entspricht genau einem vollständig charakterisierten Zustand des Systems. Die Zeitentwicklung des Systems definiert eine Kurve im Phasenraum, die <u>Phasenraum-Trajektorie</u>.

<u>Beispiele:</u>

(i) 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

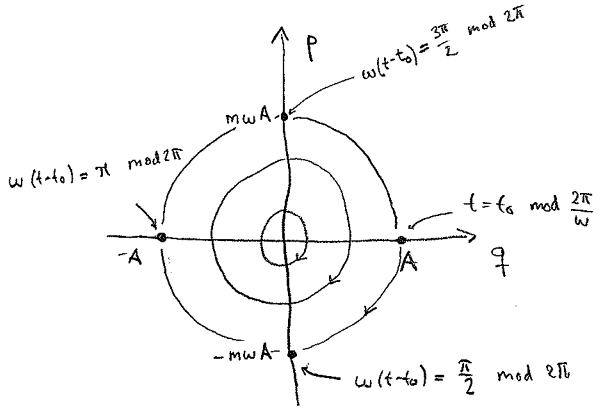
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

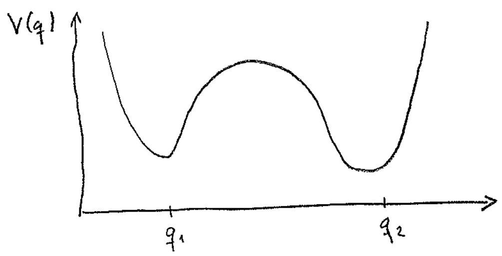
$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m} q \quad ; \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

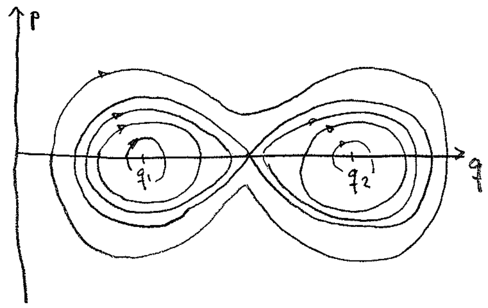
$$q = A\cos(\omega(t-t_0))$$

$$p = -m\omega A \sin(\omega(t-t_0))$$

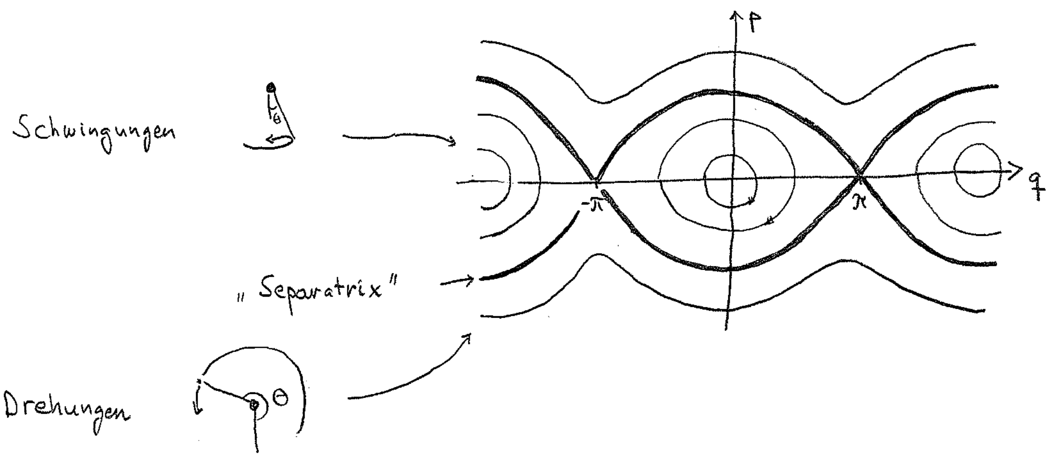


(ii)





(iii) Pendel; $q = \Theta$

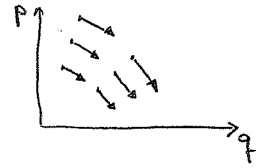


Geschwindigkeit des Phasenraum-Punktes:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left(\frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_s}{dt}, \frac{dp_1}{dt}, \dots, \frac{dp_s}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_s}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) =: \underline{\omega}$$

Dieser Ausdruck definiert ein $2s$-dimensionales Vektorfeld im Phasenraum, $\underline{\omega}(q,p,t)$. Falls $H = H(q,p)$ nicht explizit t-abhängig ist, so ist auch $\underline{\omega} = \underline{\omega}(q,p)$ zeitunabhängig.

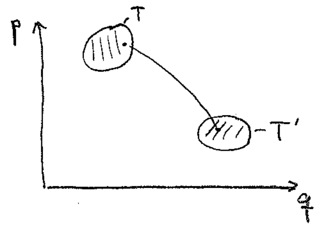


Divergenz dieses Vektorfeldes verschwindet:

$$\nabla \cdot \underline{\omega} = \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial \omega_a}{\partial q_a} + \sum_{a=1}^{s} \frac{\partial \omega_{s+a}}{\partial p_a}$$

$$= \sum_{a=1}^{s} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_a \partial p_a} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_a \partial q_a}\right) = 0.$$

Betrachte Teilbereich T des Phasenraumes. Wenn sich jeder Punkt im T mit der Zeit so verschiebt wie es den Bewegungsgleichungen entspricht, verschiebt sich auch T.



Liouvillescher Satz: Der Rauminhalt eines Teilbereichs des Phasenraums, der gemäß den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen verschoben wird, ist konstant.

D.h., $\mathrm{Vol}(T) = \mathrm{Vol}(T')$.

(Die Form von T ändert sich im Allgemeinen bei der Verschiebung.)

(Bemerkung: Der Liouvillesche Satz kann auch als Folge der Bemerkungen * und *** auf Seite 50 betrachtet werden.)

Physikalisch: T beschreibt eine Menge von Massenpunkten, nahe aneinander und mit ähnlichen Geschwindigkeiten, wie z.B. in einem Teilbereich einer Flüssigkeit.

Begründung

Um dem Teilbereich zu folgen, wähle als „Tracer" eine gleichmäßig verteilte Menge von Massenpunkten:

$$\rho(t_0) := \frac{\text{Zahl} =: N}{\text{Phasenraumvolumen}} = \text{Konstante} \quad (\text{bzgl. } q, p)$$

Die Zahl N bleibt erhalten (definitionsgemäß); dieses entspricht der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \underline{J} = 0 ,$$

wobei $\underline{J}$ die Stromdichte bezeichnet.

$$\left(\quad \frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho = \int_V -\nabla \cdot \underline{J} \overset{\text{Gauss}}{=} -\int_{\partial V} d\underline{s} \cdot \underline{J} = \text{Strom aus dem Volumenelement} \right)$$

Auf der anderen Seite ist $\underline{J} = \rho \underline{w}$.

$$\left(\text{Stromdichte} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Dicke}}{\text{Zeit}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \underline{w}) = \frac{d\rho}{dt} + \underbrace{(\nabla \rho)}_{\substack{=0 \\ \left(\text{gleichmäßig verteilt!}\right)}} \cdot \underline{w} + \rho \underbrace{\nabla \cdot \underline{w}}_{=0 \ (\text{Seite 52})} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dichte bleibt konstant.}$$

Wenn aber sowohl Dichte als auch N unverändert bleiben, dann muß auch die Größe des Volumens konstant sein:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{N(t)} = \int_{\text{Vol}(T(t))} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{\rho(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \square .$$

— ∘ —

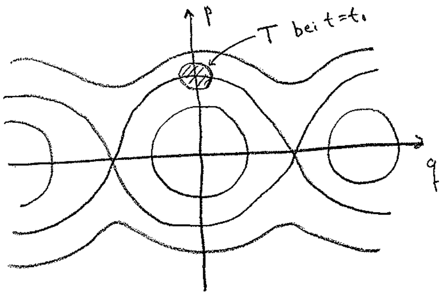
Der Liouvillesche Satz hat wichtige Anwendungen besonders in der klassischen statistischen Mechanik.

— ∘ —

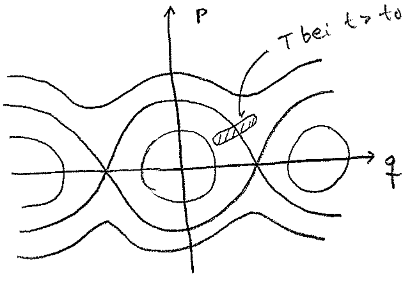
Chaos

Phasenraumbetrachtungen machen es deutig, dass es Systeme gibt, in denen kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen zu großen Änderungen im Endergebnis führen können, obwohl die Dynamik deterministisch ist.

Beispiel: Pendel (Seite 51)

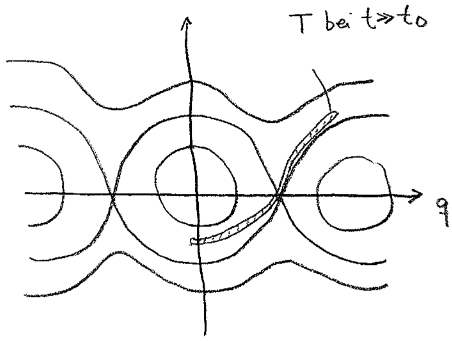


⇒



⇓

⇒ Volumen bleibt unverändert, aber Form wird verzerrt.



Manchmal ist die Verzerrung so groß, daß der bei $t \to \infty$ besetzte Teilbereich, genannt Grenzzyklus bzw. Attraktor, kein Punkt bzw. Linie ist, sondern einen „seltsamen" Bereich des Phasenraums erfüllt, von sogar „nichtganzzähliger Dimension". Dann geht es um Chaos.

Ein quantitatives Maß für das Auseinandertreiben der Lösungen ist der Lyapunov-Exponent λ:
1857-1918

$$s(t) = s(t_0)\, e^{\lambda (t-t_0)}$$

Entfernung im Phasenraum

Für $\lambda > 0$ ist die Bewegung chaotisch.

Sonnensystem: $\lambda \approx +3 \times 10^{-10} \frac{1}{\text{Jahr}}$!