3. Hamilton - Formalismus

Der dritte Formalismus der klassischen Mechanik, Hamilton-Formalismus, wird besonders wichtig für den Übergang in Quantenmechanik (Theorie II) und Statistische Physik (Theorie III) sein. Außerdem bietet er viele „ästhetische" Vorteile.

3.1. Legendre- Transformation und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

1752-1833

Lagrange:
* verallg. Koordinaten q_a, $a = 1, \dots, s$
* verallg. Geschwindigkeiten $\dot{q}_a$, $a = 1, \dots, s$
* Lagrange - Funktion $L(q, \dot{q}, t)$

$\Rightarrow$ verallg. Impulse $p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$

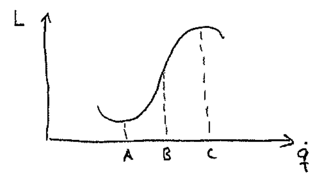
Die Idee: Nehme statt $q_a, \dot{q}_a$ jetzt q_a, p_a als die „Koordinaten". Diese bilden einen $2s$-dimensionalen „Phasenraum".

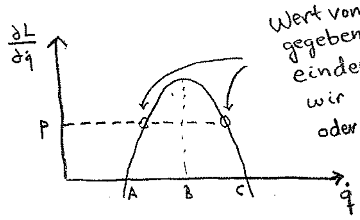
Schwierigkeiten:

(i) Um $\dot{q}_a$ mit p_a ersetzen zu können, in $L(q,\dot{q},t)$ müssen wir zuerst die Definition

$$p_a = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_a}$$

invertieren. Dieses ist in einem Bereich möglich, wo $\partial^2 L / \partial \dot{q}^2 \neq 0$ bleibt:





Wert von $\dot{q}$ für gegebenes p nicht eindeutig, es sei denn, wir bleiben bei $\dot{q} < B$ oder $\dot{q} > B$.

(ii) Auch wenn wir uns z.B. auf $\dot{q} < B$ beschränken, enthält die Funktion $L(q, \dot{q}(p), t)$ weniger Information als ursprünglich! Zum Beispiel:

$$L := \frac{m}{2}\dot{q}^2 \qquad \neq \qquad L' := \frac{m}{2}\left(\dot{q} - f(q)\right)^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \qquad\qquad p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = m\left(\dot{q} - f(q)\right)$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1}{2m}p^2 \qquad\qquad \Leftrightarrow L' = \frac{1}{2m}p'^2$$

Wir bekommen also dieselbe Funktion, obwohl die Physik sehr unterschiedlich sein muss (vgl. Euler-Lagrange-Gl.!).

Behauptung: die Funktion

$$H(q,p,t) := \sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L = \sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L ,$$

genannt die Hamilton-Funktion, enthält dieselbe Information wie $L(q,\dot{q},t)$, d.h. $L(q,\dot{q},t)$ kann von gegebener $H(q,p,t)$ rekonstruiert werden (solange $\det(\partial^2 L/\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b) \neq 0$ gilt). In H muß $\dot{q}$ durch p ersetzt werden.*

Bemerkungen:

* Mathematisch heißt die Transformation von L zu H eine Legendre-Transformation bzgl. $\dot{q}$.
* Physikalisch entspricht H der Energie (vgl. Seite 27).

Beweis: Durch explizite Konstruktion, bzw. (zweite) (inverse) Legendre-Transformation.

$$\dot{Q}_b := \frac{\partial H}{\partial p_b} = \frac{\partial}{\partial p_b}\left[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L(q,\dot{q},t)\right]$$

$$= \dot{q}_b + \sum_{a=1}^{s} p_a \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial p_b} - \sum_{a=1}^{s} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}_{p_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial p_b} \stackrel{!}{=} \dot{q}_b$$

$$L^{neu} := \sum_{b=1}^{s} p_b \frac{\partial H}{\partial p_b} - H$$

$$= \sum_{b=1}^{s} p_b \dot{q}_b - \left[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L\right] \stackrel{!}{=} L \qquad \square$$

Beispiele:

(i) $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q) = \underline{\underline{\frac{p^2}{2m} + V(q)}}$$

Inverse Transformation:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$L^{neu} = p\dot{q} - H = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - V(q)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - V(q) = \underline{\underline{\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)}} \qquad \text{ok!}$$

---

* Formell: $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b}\left[\sum_{a=1}^{s} \dot{q}_a p_a - L\right] = p_b - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = p_b - p_b = 0$,

d.h. $\dot{q}_b$ soll nicht auftauchen, falls p_b schon „fixiert" ist.

(ii) In der Thermodynamik:

innere Energie $U(S,V,N)$; S = Entropie, V = Volumen, N = Teilchenzahl

Temperatur: $T = \frac{\partial U}{\partial S}$

frei Energie: $F(T,V,N) = U(S,V,N) - S\frac{\partial U}{\partial S}$

$= U - TS$.

↑ Legendre × (-1) .

— • —

Nachdem es jetzt klar ist, dass alle Informationen im Prinzip in der Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ enthalten sind, müssen wir noch die Dynamik (d.h. Euler-Lagrange-Gl.) mittels dieser Funktion ausdrücken..

↳ Zeitableitungen der Phasenraumkoordinaten q und p

∗ Seite 44 : $\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}$

∗ Betrachte jetzt $\frac{\partial H}{\partial q_a}$:

$$H = \sum_{b=1}^{s} p_b \dot{q}_b(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t),t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \sum_b p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_a} \underset{\text{Euler-Lagrange}}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \overset{!}{=} -\frac{d}{dt}p_a$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}}$$

Im Hamilton-Formalismus gibt es also zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, statt eine Gleichung zweiter Ordnung!

Als Folge:

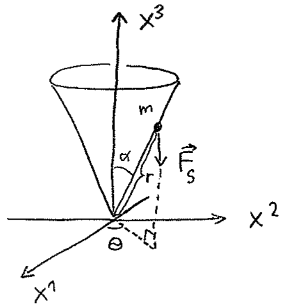
$$\frac{dH}{dt} = \sum_a \frac{\partial H}{\partial q_a}\frac{dq_a}{dt} + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{dp_a}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \sum_a \cancel{\left(-\frac{dp_a}{dt}\frac{dq_a}{dt} + \frac{dq_a}{dt}\frac{dp_a}{dt}\right)} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad !$$

Keine explizite Abhängigkeit von t
⇒ H = Energie bleibt erhalten.

— • —

Beispiel: Ein Massenpunkt gleite reibungsfrei im Schwerefeld auf einem Kreiskegel.



Verallg. Koordinaten: r, Θ
(der Winkel α bleibt konstant)

$$x^1 = r \sin\alpha \cos\Theta \qquad \dot{x}^1 = \dot{r} \sin\alpha \cos\Theta - r \sin\alpha \sin\Theta \,\dot{\Theta}$$
$$x^2 = r \sin\alpha \sin\Theta \qquad \dot{x}^2 = \dot{r} \sin\alpha \sin\Theta + r \sin\alpha \cos\Theta \,\dot{\Theta}$$
$$x^3 = r \cos\alpha \qquad \dot{x}^3 = \dot{r} \cos\alpha$$

$$T = \frac{m}{2}\left((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\Theta}^2 \right)$$

$$V = m g x^3 = m g r \cos\alpha$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\Theta}^2 \right) - m g r \cos\alpha \quad ; \quad s = 2$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$p_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = m r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\Theta}$$

Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \dot{r} p_r + \dot{\Theta} p_\Theta - L \\ &= m \dot{r}^2 + m r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\Theta}^2 - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2} r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\Theta}^2 + m g r \cos\alpha \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\Theta}^2 + m g r \cos\alpha \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\Theta^2}{2 m r^2 \sin^2\alpha} + m g r \cos\alpha \end{aligned}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\Theta^2}{m r^3 \sin^2\alpha} - m g \cos\alpha$$

$$\frac{dp_\Theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta} = 0 \qquad \Rightarrow \quad p_\Theta \text{ ist Erhaltungsgröße!}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\Theta} = \frac{p_\Theta}{m r^2 \sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp_r}{dt} = \underbrace{\frac{p_\Theta^2}{m^2 \sin^2\alpha}}_{\text{Konstante}} \cdot \frac{1}{r^3} - \underbrace{g \cos\alpha}_{\text{Konstante}}$$

Diese Gleichung ist unabhängig von Θ, und könnte zuerst für $r(t)$ gelöst werden; nachher $\Theta(t)$ aus $d\Theta/dt = p_\Theta / [m \sin^2\alpha \, r^2(t)]$.

— o —