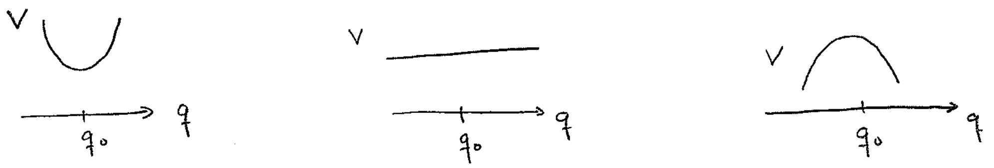
2.5 Kleine Schwingungen

Sei q_0 eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen, d.h. $\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]_{q=q_0} = 0$.

Was für Lösungen gibt es „in der Nähe" von q_0?

Insbesondere: Sei q_0 die Lösung in der Ruhelage, $\dot q_0 = 0$.

Wie verhält sich das System bei kleiner Auslenkung um diesen Zustand?



„stabil"   „flache Richtung"   „instabil"

$\underline{\underline{s=1}}$ (ein Freiheitsgrad)

$$L := \frac{1}{2} f(q)\,\dot q^2 - V(q)$$

Das Potential habe ein Extremum bei q_0 : $V'(q_0) = 0$.
Die Lösung sei der Ruhezustand, $\dot q_0 = 0$. Schreibe jetzt

$$q = q_0 + \delta q\ ;$$

und entwickle zur 2. Ordnung in der kleinen Auslenkung δq :

$$L = \frac{1}{2} f(q_0)\,\delta\dot q^2 - V(q_0) - \underbrace{V'(q_0)}_{0!}\,\delta q - \frac{1}{2} V''(q_0)\,\delta q^2 + \mathcal{O}(\delta q^3)$$

$\delta\dot q^2$ schon 2. Ordnung
$\Rightarrow$ 0. Ordnung reicht in $f(q_0+\delta q)$

$$\approx \frac{1}{2} f(q_0)\,\delta\dot q^2 - V(q_0) - \frac{1}{2} V''(q_0)\,\delta q^2$$

Euler-Lagrange mit δq, $\delta\dot q$:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta q} = -V''(q_0)\,\delta q$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta\dot q} = f(q_0)\,\delta\dot q$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \delta\dot q} = \frac{\partial L}{\partial \delta q}$

$$\Rightarrow \quad \delta\ddot q = -\frac{V''(q_0)}{f(q_0)}\,\delta q$$ „harmonischer Oszillator"

Für $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} > 0$ schreibe $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} =: \omega^2$ $\Rightarrow$ allgemeine Lösung ist
$\delta q = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.
„begrenzt" bzw. „stabil"

Für $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} < 0$ schreibe $\frac{V''(q_0)}{f(q_0)} =: -\varkappa^2$ $\Rightarrow$ allgemeine Lösung ist
$\delta q = A e^{\varkappa t} + B e^{-\varkappa t}$,
„unbegrenzt" bzw. „instabil"

$s > 1$ (mehrere Freiheitsgrade)

$$L := \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{s} f_{ab}(q)\, \dot q_a \dot q_b - V(q)$$

Ruhelage befinde sich bei $q_0 = (q_{10}, \dots, q_{s0})$, mit $\frac{\partial V}{\partial q_a}(q_0) = 0 \;\forall a$.

Entwicklung zur zweiten Ordnung in $\delta q_a = q_a - q_{a0}$:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q_0)\, \delta\dot q_a \delta\dot q_b - V(q_0) - \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{\partial^2 V(q_0)}{\partial q_a \partial q_b} \delta q_a \delta q_b + O(\delta q^3).$$

Wir bezeichnen
$$m_{ab} := f_{ab}(q_0), \quad k_{ab} := \frac{\partial^2 V(q_0)}{\partial q_a \partial q_b}.$$

Beide sind symmetrisch in $a \leftrightarrow b$ *.

Matrixschreibweise: $\delta q = \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_s \end{pmatrix}$; $\underbrace{m = (m_{ab})\;;\; k = (k_{ab})}_{s\times s\text{-Matrizen}}$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \delta\dot q^T m\, \delta\dot q - \frac{1}{2} \delta q^T k\, \delta q - V(q_0) + O(\delta q^3)$$

Konstante $\Rightarrow$ spielt in Euler-Lagrange keine Rolle.

Weil m und k symmetrisch sind, können sie mit orthogonalen Transformationen diagonalisiert werden. <u>Aber gleichzeitig</u>?

<u>Schritt 1:</u>

$$R m R^T = m_D := \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_s \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = R^T m_D R \qquad (R^T R = \mathbb{1})$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \delta\dot q^T R^T m_D R\, \delta\dot q - \frac{1}{2} \delta q^T k\, \delta q \qquad \Big| \quad \delta q' := R\,\delta q, \;\; \delta q = R^T \delta q'$$

$$= \frac{1}{2} \delta\dot q'^T m_D\, \delta\dot q' - \frac{1}{2} \delta q'^T R k R^T \delta q'$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{s} m_a (\delta\dot q'_a)^2 - \frac{1}{2} \delta q'^T R k R^T \delta q'$$

<u>Schritt 2:</u>

Definiere neue Variablen $Q'_a := \sqrt{m_a}\, \delta q'_a$.

Dann ist $Q' = m_D^{1/2} \delta q'$, mit $m_D^{1/2} := \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_s} \end{pmatrix}$,

und $\delta q' = m_D^{-1/2} Q'$.

---

* $\sum_{a,b} f_{ab} \delta\dot q_a \delta\dot q_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \left(f_{ab} \delta\dot q_a \delta\dot q_b + f_{ba} \delta\dot q_b \delta\dot q_a \right) = \sum_{a,b} \underbrace{\frac{1}{2}(f_{ab} + f_{ba})}_{\text{symmetrisch!}} \delta\dot q_a \delta\dot q_b$

$k_{ba} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_b \partial q_a} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b} = k_{ab}$

Die Lagrange-Funktion mit Q':

$$L = \frac{1}{2} \dot{Q}'^T \dot{Q}' - \frac{1}{2} Q'^T m_D^{-1/2} R k R^T m_D^{-1/2} Q' .$$

Schritt 3:

Die Matrix $m_D^{-1/2} R k R^T m_D^{-1/2}$ ist symmetrisch:

$$\left(m_D^{-1/2} R k R^T m_D^{-1/2}\right)^T \underset{(m_D^{-1/2})^T = m_D^{-1/2}}{=} m_D^{-1/2} R k^T R^T m_D^{-1/2} \underset{k^T = k}{=} m_D^{-1/2} R k R^T m_D^{-1/2} .$$

Deshalb kann sie wieder diagonalisiert werden:

$$m_D^{-1/2} R k R^T m_D^{-1/2} = \bar{R}^T \bar{k}_D \bar{R} \quad , \quad \text{mit} \quad \bar{k}_D := \begin{pmatrix} \bar{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{k}_s \end{pmatrix} .$$

Bezeichne:

$$Q := \bar{R} Q'$$
$$Q' = \bar{R}^T Q$$

Bemerke:

$$\dot{Q}' = \bar{R}^T \dot{Q} \qquad \dot{Q}'^T = \dot{Q}^T \bar{R}$$

$$\dot{Q}'^T \dot{Q}' = \dot{Q}^T \underbrace{\bar{R} \bar{R}^T}_{\mathbb{1}} \dot{Q} = \dot{Q}^T \dot{Q} = \sum_{a=1}^{s} \dot{Q}_a^2$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T \bar{k}_D Q$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{s} \left(\dot{Q}_a^2 - \bar{k}_a Q_a^2 \right)$$

Die Q_a heissen <u>Normalkoordinaten</u>.

Zusammenfassung:

Die kleinen Schwingungen werden von s <u>unabhängigen „harmonischen Oszillatoren"</u> beschrieben.

- $\bar{k}_a > 0 \Rightarrow$ tatsächlich eine „Schwingung", mit Eigenkreisfrequenz $\omega_a = \sqrt{\bar{k}_a}$.
- $\bar{k}_a < 0 \Rightarrow$ Instabilität der Ruhelage (Potential in dieser Richtung negativ gekrümmt)
- $\bar{k}_a = 0 \Rightarrow$ Koordinate Q_a ist zyklisch; die entsprechende Richtung ist „flach"; einfache Translationsbewegung in entsprechender Koordinate, $Q_a = Q_a^0 + \dot{Q}_a^0 t$.

Beispiel: Zwei gleiche 1-dimensionale Systeme, mit Eigenkreisfrequenz ω_0, die durch eine Wechselwirkung gekoppelt sind.

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V \qquad , \; V = \frac{1}{2}(x\; y)\begin{pmatrix} \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Kinetische Energie hat bereits eine einfache Form $\Rightarrow$ wir sind direkt beim Schritt 3.

$$\det\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \bar{k}_i & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 - \bar{k}_i \end{pmatrix} = (\omega_0^2 - \bar{k}_i)^2 - \alpha^2 = 0 \qquad \omega_0^2 - \bar{k}_i = \pm\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \omega_0^2 - \alpha \\ \bar{k}_2 &= \omega_0^2 + \alpha \end{aligned}\right\} \text{Eigenkreisfreq. des gekoppelten Systems}$$

Beide positiv für $\alpha < \omega_0^2$.

Diagonalisierung:
$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \alpha & 0 \\ 0 & \omega_0^2 + \alpha \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \alpha & -\omega_0^2 + \alpha \\ \omega_0^2 + \alpha & \omega_0^2 + \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{ok!}$$

Normalkoordinaten:
$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ A\cos(\sqrt{\bar{k}_1}\,t + B) + C\cos(\sqrt{\bar{k}_2}\,t + D)\right\}$$

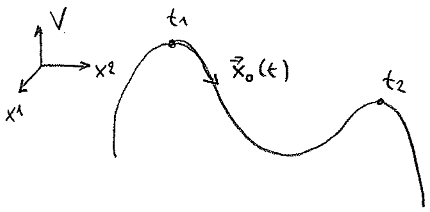
„modulierte Oszillationen"

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Das Problem wird „interessanter", falls die Referenzlösung q_0 zeitabhängig ist.

Zum Beispiel:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$$
$$V = f(\vec{x}) \;, \; \vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$



Referenzlösung : $m\ddot{x}_0^i = -\left.\frac{\partial V}{\partial x^i}\right|_{\vec{x}_0}, \quad i = 1, 2 \qquad (*)$

Auslenkung : $\vec{x} = \vec{x}_0 + \delta\vec{x}$

Bewegungsgleichung : $m\ddot{x}^i = -\left.\frac{\partial V}{\partial x^i}\right|_{\vec{x} = \vec{x}_0 + \delta\vec{x}}$

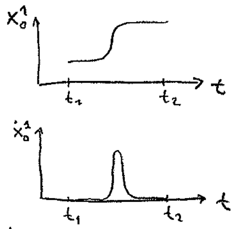
$$\Rightarrow \quad m\,\delta\ddot{x}^i = \underbrace{-\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\vec{x}_0}}_{\text{eine Matrix von „zeitabhängigen Federkonstanten"}} \delta x^j \qquad (**)$$

$\uparrow$ durch $\vec{x}_0(t)$

Eine Lösung von $(**)$ können wir aber leicht finden:

$$\frac{d}{dt}(*) \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2}{dt^2}\dot{x}_0^i = -\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\vec{x}_0}\dot{x}_0^j$$

$$\delta x^i = \dot{x}_0^i \qquad \text{funktioniert!}$$



Es gibt wahrscheinlich aber auch andere Lösungen, darunter instabile.
