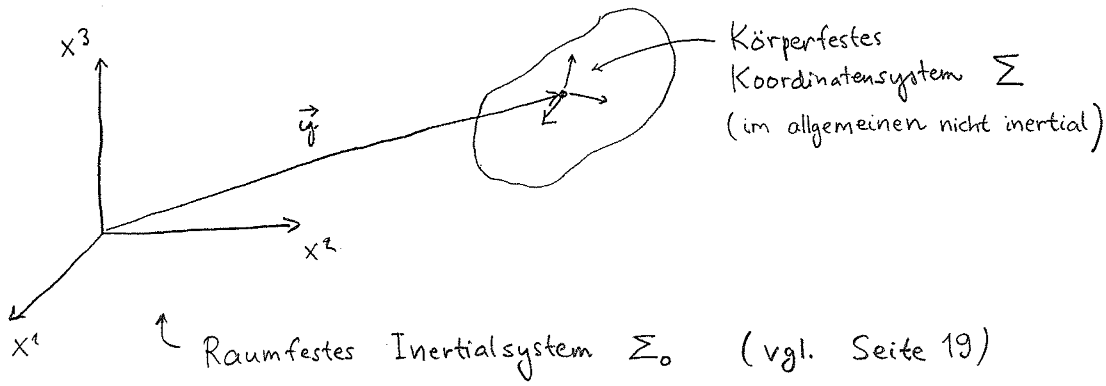
9.4 Starre Körper und Trägheitstensor

Wir betrachten jetzt etwas ausführlicher den auf Seite 34 eingeführten Fall von starren Körpern.



Der Körper hat 6 Freiheitsgrade; 3 davon beschreiben die Bewegung des Schwerpunkts, die restlichen 3 Drehungen.

Frage: Wie sieht die Lagrange-Funktion aus?
(Folgefragen: Welche sind die Bewegungsgleichungen?
Welche sind die erhaltenen Impulse?)

Der Körper besteht aus „kleinen Massen" m_a, mit Ortsvektoren $\vec{x}_{0a}$.

Gesamtmasse: $M := \sum_a m_a$.

„Kontinuumlimes": $\sum_a m_a f(\vec{x}_{0a}) \to \int d^3\vec{x}_0\, \rho(\vec{x}_0) f(\vec{x}_0)$, wobei $\rho(\vec{x}_0)$ „Massendichte" bezeichnet.
(z.B. $\rho(\vec{x}_0) = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{x}_0 - \vec{x}_{0a})$)

Zur Erinnerung: (Kapitel 1.6) für $\vec{y} = 0$ (Σ_0 und Σ haben den gleichen Ursprung) und $\dot{\vec{x}} = 0$ (Massenpunkt ruht bzgl. Σ) gilt (Seite 21):

$$\vec{x}_0 = R\vec{x}, \quad \dot{\vec{x}}_0 = \dot{R}\vec{x} = R(\vec{\omega} \times \vec{x})$$

Winkelgeschwindigkeit
Drehmatrix.

Wir schreiben nun

$$\vec{x}_0 = \vec{y} + R\vec{x}$$

Koordinaten bzgl. Σ
Drehmatrix
„Translationsbewegung"

und daher

$$\dot{\vec{x}}_0 = \dot{\vec{y}} + R(\vec{\omega} \times \vec{x})$$

Wir können jetzt die kinetische Energie T bestimmen.

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_{a0}^{\,2} = \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\dot{\vec{y}} + R(\vec{\omega} \times \vec{x}_a) \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_a m_a\right)}_{\text{Gesamtmasse } M} \dot{\vec{y}}^{\,2} + \dot{\vec{y}} \cdot R\left(\vec{\omega} \times \sum_a m_a \vec{x}_a\right) + \sum_a \frac{m_a}{2} \left[R(\vec{\omega} \times \vec{x}_a) \right]^2$$

Zweiter Term verschwindet, falls
(i) $\dot{\vec{y}} = 0$, d.h. Koordinatenursprung ruht;
(ii) $\sum_a m_a \vec{x}_a = 0$, d.h. Koordinatenursprung von Σ liegt beim Schwerpunkt.
$\left(\vec{X} = \frac{\sum_a m_a \vec{x}_a}{\sum_a m_a} \right)$
Im Folgenden werden nur diese Fälle betrachtet.
insbesondere Fall (ii)

Für eine orthogonale Matrix R gilt: $(R\vec{v})^2 = R^{ij} v^j R^{ik} v^k$
$= \underbrace{(R^T)^{ji} R^{ik}}_{\delta^{jk}} v^j v^k = \vec{v}^{\,2}$.

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} M \vec{v}^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_a m_a (\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^2 \quad ; \quad \vec{v} := \dot{\vec{y}} .$$

Weiterhin gilt:

$$(\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^2 = (\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^i (\vec{\omega} \times \vec{x}_a)^i$$
$$= \varepsilon^{ijk} \omega^j x_a^k \, \varepsilon^{ilm} \omega^l x_a^m \qquad \Big| \; \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ilm} = \delta^{jl} \delta^{km} - \delta^{jm} \delta^{kl}$$
$$= \omega^j \left[\vec{x}_a^{\,2} \delta^{jl} - x_a^j x_a^l \right] \omega^l$$

Daher hat die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}^{\,2} + \frac{1}{2} \omega^i J^{ij} \omega^j ,$$

wobei

$$J^{ij} := \sum_a m_a \left(\delta^{ij} \vec{x}_a^{\,2} - x_a^i x_a^j \right)$$

Kontinuumlimes $\quad \xrightarrow{\ \ } \int d^3\vec{x} \; \rho(\vec{x}) \left(\delta^{ij} \vec{x}^{\,2} - x^i x^j \right)$ der Trägheitstensor ist.

Bemerkungen: (i) J^{ij} ist bzgl. eines körperfesten Koordinatensystems definiert, und hängt von der Wahl des Ursprungs ab (vgl. Seite 38).

(ii) J^{ij} sind die Komponenten eines Tensors 2. Stufe. Mit J bezeichnen wir die entsprechende Matrix, mit Komponenten J^{ij}. Es gilt:
$$\omega^i J^{ij} \omega^j = \omega^T J \omega .$$

(iii) J ist symmetrisch: $J^{ji} = J^{ij}$.

Wichtige Eigenschaften des Trägheitstensors

* Transformation unter Drehungen: $J'^{ij} = R^{ik} R^{jl} J^{kl} = R^{ik} J^{kl} (R^T)^{lj}$

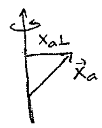
  $\Leftrightarrow J' = R J R^T$

* Eigenwerte und Eigenvektoren: Jede symmetrische Matrix lässt sich durch eine orthogonale Transformation diagonalisieren $\Rightarrow$ man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

  $$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

  J_1, J_2, J_3 heißen Hauptträgheitsmomente, und die entsprechenden Eigenvektoren definieren die Hauptträgheitsachsen.

* Trägheitsmoment bzgl. einer festen Achse: Sei $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$, d.h. $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_3$.



  Dann ist $T = \frac{1}{2} J^{33} \omega^2$, mit

  $$J^{33} = \sum_a m_a \left(\delta^{33} \vec{x}_a^{\,2} - x_a^3 x_a^3 \right)$$
  $$= \sum_a m_a \left[(x_a^1)^2 + (x_a^2)^2 \right] = \sum_a m_a x_{a\perp}^2 .$$

(* Kinetische Energie im Hauptachsensystem: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow T = \frac{1}{2} \left(J_1 (\omega^1)^2 + J_2 (\omega^2)^2 + J_3 (\omega^3)^2 \right)$)

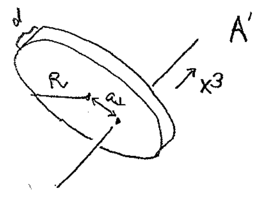
* Trägheitstensor im System Σ', das um den Vektor $\vec{a}$ relativ zu Σ verschoben ist („Steinerscher Satz"):

  $$\vec{x}_a' = \vec{x}_a + \vec{a}$$

  $$J'^{ij} = \sum_a m_a \left[\delta^{ij} (\vec{x}_a')^2 - x_a'^i x_a'^j \right]$$
  $$= \sum_a m_a \left[\delta^{ij} (\vec{x}_a + \vec{a})^2 - (x_a^i + a^i)(x_a^j + a^j) \right]$$
  $$= J^{ij} + 2 \delta^{ij} \vec{a} \cdot \underbrace{\sum_a m_a \vec{x}_a}_{0!} - a^i \underbrace{\sum_a m_a x_a^j}_{0!} - a^j \underbrace{\sum_a m_a x_a^i}_{0!} + \underbrace{\sum_a m_a}_{M} \left[\delta^{ij} \vec{a}^{\,2} - a^i a^j \right]$$

  (weil Schwerpunkt am Ursprung)

$$\Rightarrow \quad J'^{ij} = J^{ij} + M \left[\delta^{ij} \vec{a}^{\,2} - a^i a^j \right] .$$



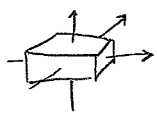
z.B. $J'^{33} = J^{33} + M a_\perp^2$

wobei $J^{33} = \rho \int_0^d dx^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r \cdot r^2 = \frac{\pi \rho d R^4}{2}$

* Symmetrien: Für nicht diagonale Komponente gilt:

$$J^{12} = \int d^3\vec{x}\; \rho(x^1,x^2,x^3)\,(-x^1x^2)$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\,\left[-\rho(x^1,x^2,x^3)\,x^1x^2 - \rho(\overset{-x^1}{\cancel{x^1}},x^2,x^3)\,\overset{-x^1}{\cancel{x^1}}\,x^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\; x^1x^2\left[\rho(-x^1,x^2,x^3) - \rho(x^1,x^2,x^3)\right]$$

Falls ρ also symmetrisch ist, $\rho(-x^1,x^2,x^3) = \rho(x^1,x^2,x^3)$, dann verschwinden die nichtdiagonalen Komponente. D.h., die Hauptträgheitsachsen sind die (anschaulichen) Symmetrieachsen des Körpers.



— ∘ —

Wählt man y^i und φ^i, mit $v^i = \dot{y}^i$ und $\omega^i = \dot{\varphi}^i$, als die verallg. Koordinaten, ist also

$$L = \frac{1}{2}M\sum_{i=1}^{3}(\dot{y}^i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\dot{\varphi}^i J^{ij}\dot{\varphi}^j - V(\vec{y},\vec{\varphi}).$$

Der zu $\vec{y}$ kanonisch konjugierte Impuls, bzw. Gesamtimpuls, hat die Komponente

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i} = M\dot{y}^i = Mv^i,$$

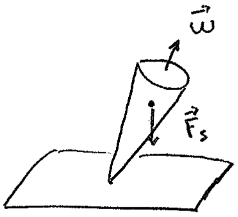
während der zu $\vec{\varphi}$ kanonisch konjugierte Impuls, bzw. Eigendrehimpuls, die Komponente

$$M^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^i} = \sum_{j=1}^{3} J^{ij}\dot{\varphi}^j = \sum_{j=1}^{3} J^{ij}\omega^j$$

hat. Die Bewegungsgleichungen sind die üblichen,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p^i = \dfrac{\partial L}{\partial y^i} = -\dfrac{\partial V}{\partial y^i} & \text{„Gesamtkraft"} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}M^i = \dfrac{\partial L}{\partial \varphi^i} = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi^i} & \text{„Drehmoment"} \end{cases}$$

Ihre praktische Lösung ist in der Regel sehr schwierig — so ist die „Theorie des Kreisels" ein großer Klassiker der theoretischen Mechanik.



— · —