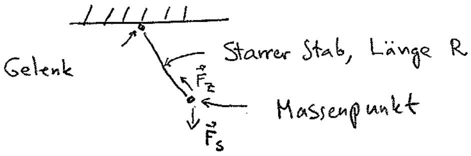
2.3. Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen sind Einschränkungen der Bewegung, die sich durch Gleichungen der Form

$$f_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, \Lambda$$

beschreiben lassen. Keine Geschwindigkeiten in f_α $\Leftrightarrow$ Zwangsbedingung ist „<u>holonom</u>". (Ohne Zeit: „skleronom";
└ starr
mit Zeit: „rheonom".)
└ fließend

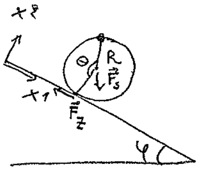
Beispiele: (i) Pendel



Ursprung bei Gelenk,
Schwingung in (x^1, x^2) - Ebene

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2 \\ x^3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = (x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 \\ f_2 = x^3 \end{cases}$$

(ii) Reifen auf Ebene mit Reibung



$$\Rightarrow x^1 = R \cdot \theta$$
$$f_1 = x^1 - R \cdot \theta$$

Um die Zwangsbedingungen zu erzwingen wirken Kräfte auf die Massenpunkte, die sogenannten <u>Zwangskräfte</u>, $\vec{F}_Z$. Behandlung solcher Systeme mit Newtonschen Gesetzen kann sehr mühsam sein.

<u>Im Lagrange-Formalismus:</u> („Rezept")

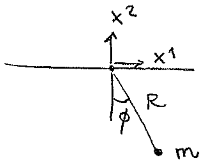
(a) Führe $s = 3N - \Lambda$ verallgemeinerte Koordinaten $q_1 \dots q_s$ ein, die die Konfigurationen, die die Zwangsbendingungen erfüllen, parametrisieren.

(b) Drücke die Lagrange-Funktion $L = T - V$ durch $q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ aus. Dabei enthält V nur die Beiträge, die <u>nicht</u> die Zwangskräfte verursachen.

(c) Löse die Euler-Lagrange-Gleichungen, $\frac{\partial L}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$, $a = 1, .., s$.

Man braucht sich also um die Zwangskräfte nicht zu kümmern!

Beispiele : (i) Pendel



(a) $q := \phi \qquad (s=1)$

$x^1 = R\sin\phi$
$x^2 = -R\cos\phi$

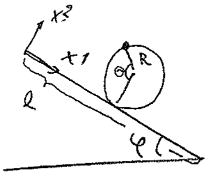
(b) $$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2}\left((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\cos^2\phi + R^2\sin^2\phi\right)\dot{\phi}^2 = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2$$

$$V = mg\,x^2 = -mgR\cos\phi$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2 + mgR\cos\phi$$

(c) $$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgR\sin\phi \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} \qquad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\sin\phi$$

(ii) Reifen auf Ebene



(a) $q := x^1$

$\Theta = \frac{x^1}{R}$

(b) $$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^1)^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{\Theta}^2 \overset{\dot{\theta} = \dot{x}^1/R}{=} m(\dot{x}^1)^2$$

$$V = mg(l - x^1)\sin\varphi$$

$$L = T - V = m(\dot{x}^1)^2 - mg(l - x^1)\sin\varphi$$

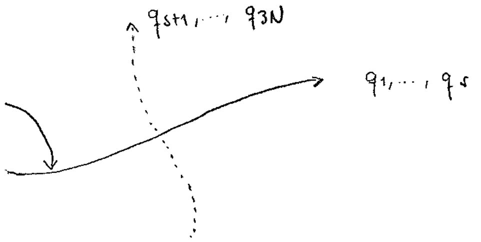
(c) $$\frac{\partial L}{\partial x^1} = mg\sin\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} = 2m\dot{x}^1 \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x}^1 = \frac{g}{2}\sin\varphi$$

* * *

Begründung für den Rezept (einfach aber schwierig zu verstehen!)

Betrachten wir jetzt das System mit allen 3N Koordinaten. Diese werden wie folgt eingeführt:

die Ebene bzw. „Mannigfaltigkeit" mit $f_\alpha = 0$.



Es gilt: $$f_\alpha(q_1, \ldots, q_s; \underset{\substack{\uparrow \\ q_{s+1}}}{0}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ q_{3N}}}{0}) = 0 \quad \forall \ \alpha = 1, \ldots, \Lambda$$

$$\left(\Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a} = 0 \ , \ a = 1, \ldots, s \right)$$

„Lagrange-Multiplikator"

Definiere jetzt $L' := L + \sum_{\alpha=1}^{\Lambda} \lambda_\alpha f_\alpha$, und betrachte $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ als neue Koordinaten, so dass es insgesamt $3N + \Lambda$ verallg. Koordinaten gibt. Dann folgt:

(1) Euler-Lagrange mit λ_α $\Rightarrow$ $\frac{\partial L'}{\partial \lambda_\alpha} = f_\alpha \overset{!}{=} 0.$ weil $\dot\lambda_\alpha$ nicht auftaucht Ok!

(2) Euler-Lagrange mit $q_{s+1} \cdots q_{3N}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_{\alpha=1}^{\Lambda} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a} = 0 \quad , \quad a = s+1, \dots, 3N$$

Erlaubt eine Bestimmung von λ_α. Man kann auch hieraus die Zwangskräfte identifizieren:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} + \sum_{\alpha=1}^{\Lambda} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

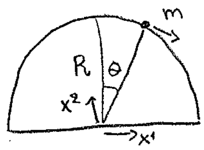
$$\text{„}m_a \ddot q_a\text{"} = -\frac{\partial V}{\partial q_a} + \text{Zwangskräfte}$$

(3) Euler-Lagrange mit $q_1, \cdots q_s$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad , \quad a = 1, \dots, s,$$

weil $\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a}(q_1, \dots, q_s; 0, \dots, 0) = 0$ gilt (Seite 32).

Beispiel:



Für welchen Θ verlässt der Massenpunkt die Oberfläche?

Als Koordinaten wählen wir r, Θ ($x^1 = r\sin\Theta$, $x^2 = r\cos\Theta$).

Auf der Oberfläche: $f := r - R = 0$. (Zwangsbedingung)

$$T = \frac{m}{2}\left((\dot x^1)^2 + (\dot x^2)^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\Theta^2\right) \qquad \text{(Seite 11)}$$

$$V = mg\,x^2 = mgr\cos\Theta$$

$$L' = T - V + \lambda f$$

(1): $f = 0 \Rightarrow r = R$

(3): $\frac{\partial T}{\partial \dot\Theta} = mR^2\dot\Theta \qquad \frac{\partial V}{\partial \Theta} = -mgR\sin\Theta \qquad \Rightarrow \qquad \ddot\Theta = +\frac{g}{R}\sin\Theta$

(2): $$\underbrace{\frac{d}{dt} m\dot r}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot r}} \underbrace{- m r\dot\Theta^2 + mg\cos\Theta}_{-\frac{\partial L'}{\partial r}} \underbrace{- \lambda}_{-\lambda\frac{\partial f}{\partial r}} = 0$$

Betrachte (3) : $\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \quad \Big| \, \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\frac{d}{dt}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\cos\theta + \text{Konstante} \qquad \Big| \; \dot{\theta} = 0 \text{ für } \theta = 0$$

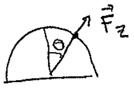
$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left[1-\cos\theta\right]$$

Betrachte (2) : $\dot{r} = 0$ wegen $r = R$

$$\Rightarrow \lambda = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$
$$= mg\left(-2 + 2\cos\theta + \cos\theta\right) = mg\left(3\cos\theta - 2\right)$$

Konstruiere Zwangskraft:

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = mg\left(3\cos\theta - 2\right)$$

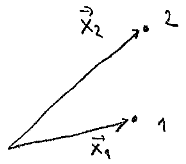


Massenpunkt verlässt Oberfläche wenn $\vec{F}_z = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$

* * *

Ein sehr wichtiges Beispiel ist ein *starrer Körper*.
Dieser besteht aus Massenpunkten, deren Abstände vorgegeben sind.

2 Massenpunkte:

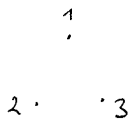


1 Zwangsbedingung : $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = l$

$s = 3N - 1 = 5$ Freiheitsgrade

z.B. 3 Schwerpunktkoordinaten +
2 Winkel für die Orientierung von $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$.

3 Massenpunkte:



3 Zwangsbedingungen : $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = l_{12}$
$|\vec{x}_2 - \vec{x}_3| = l_{23}$
$|\vec{x}_3 - \vec{x}_1| = l_{31}$

$s = 3N - 3 = 9 - 3 = 6$

z.B. 3 Schwerpunktkoordinaten +
3 Winkel („Euler-Winkel")

N≥4 Massenpunkte:

Brauche 3 neue Abstände (z.B l_{N1}, l_{N2}, l_{N3}) um Lage eindeutig zu fixieren, also ist $\Delta s = 0$ in $N \to N+1$, und $s = 6$ bleibt gültig!

* * *