2.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Eines der wichtigen Vorteile des Lagrange-Formalismus ist, dass er deutlich macht, dass es einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen gibt.

(i) Energieerhaltung als Konsequenz von Invarianz unter Zeittranslationen

Invarianz unter Zeittranslationen, bzw. Homogenität in der Zeit, heisst, dass die Lagrange-Funktion L nicht explizit von t abhängt:

$$L = L(q, \dot{q}) .$$

Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a \right)$$

$$\text{Euler-Lagrange} \quad \stackrel{\curvearrowright}{=} \sum_a \left(\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right] \dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a \right) ,$$

d.h.,

$$\frac{d}{dt} E = 0 \qquad \text{mit} \qquad E := \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L .$$

Es bleibt zu prüfen, dass diese Definition der Energie mit der üblichen übereinstimmt. Für $L = T - V$, mit

$$T := \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b \qquad \left[T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{x}_a^2 \text{ ist Spezialfall davon} \right]$$

bekommen wir

$$E = \sum_c \dot{q}_c \frac{\partial}{\partial \dot{q}_c} \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b}_{\frac{1}{2} f_{ab} \delta_{ac} \dot{q}_b + \frac{1}{2} f_{ab} \dot{q}_a \delta_{bc}} - \overset{0}{V(q)} \Big\} - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + V(q)$$

$$= \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + V = T + V$$

ok!

(ii) Erhaltung des verallgemeinerten Impulses als Folge von räumlicher Translationsinvarianz

Invarianz heisst jetzt, dass L nicht von bestimmter verallg. Koordinate, q_α, abhängt: $L = L(q_1, \ldots, \hat{q}_\alpha, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$.

↳ „nicht da"

Man nennt dann q_α eine zyklische Koordinate.

Also bleibt L invariant unter $q_\alpha \to q_\alpha + \ell$.

Euler-Lagrange: $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

Hier ist $\boxed{p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}}$ der zu q_α gehörige <u>verallgemeinerte Impuls</u>,
bzw. zu q_α <u>kanonisch konjugierte Impuls</u>.

<u>Beispiel</u>:

N Massenpunkte, nur Zentralkräfte, $V = \sum_{a,b} V_{ab}(\vec x_a - \vec x_b)$.
Wähle verallg. Koordinaten $\vec x_1$, $\vec x_{a1} := \vec x_a - \vec x_1$, $a = 2, \dots, N$.

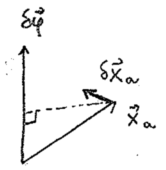
$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec x}_1^{\,2} + \sum_{a=2}^{N} \frac{m_a}{2}(\dot{\vec x}_1 + \dot{\vec x}_{a1})^2 - \sum_{a,b} V_{ab}(\vec x_{a1} - \vec x_{b1})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot x_1^i} = m_1 \dot x_1^i + \sum_{a=2}^{N} m_a(\dot x_1^i + \dot x_{a1}^i) = m_1 \dot x_1^i + \sum_{a=2}^{N} m_a \dot x_a^i$$

$$= p^i_{\text{gesamt}} \quad \text{bleibt erhalten.}$$

<u>(iii) Drehimpulserhaltung als Konsequenz von Isotropie</u>

Isotropie := Invarianz unter Drehungen.



$$\delta\vec x_a = \delta\vec\varphi \times \vec x_a \qquad (\text{Seite } 20: \ \dot{\vec x}_0 = \vec\omega_0 \times \vec x_0)$$

$$0 = \delta L = \sum_{a,i}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a^i}\delta x_a^i + \frac{\partial L}{\partial \dot x_a^i}\delta \dot x_a^i\right)$$

Euler-Lagrange

$$\overset{\curvearrowright}{=} \sum_{a,i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_a^i}\delta x_a^i + \frac{\partial L}{\partial \dot x_a^i}\delta \dot x_a^i\right)$$

$$= \sum_a\left(\dot{\vec p}_a \cdot \delta\vec x_a + \vec p_a \cdot \delta\dot{\vec x}_a\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_a \vec p_a \cdot \delta\vec x_a$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_a \vec p_a \cdot (\delta\vec\varphi \times \vec x_a)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_a \delta\vec\varphi \cdot (\vec x_a \times \vec p_a)$$

Drehung zeitunabhängig

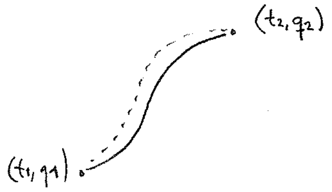
$$\overset{\curvearrowright}{=} \delta\vec\varphi \cdot \frac{d}{dt}\sum_a \vec x_a \times \vec p_a \qquad \forall\, \delta\vec\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_a \vec x_a \times \vec p_a = 0.$$

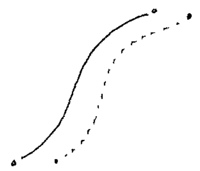
— · —

Noether-Theorem

Die bisherigen Erhaltungssätze sind alle Spezialfälle eines allgemeinen Satzes, entdeckt von Emmy Noether (1915).
1882-1935



$\delta S = 0$ mit fixierten Randbedingungen $\Rightarrow$ Euler-Lagrange



$\delta S = 0$ auch für Translation, Drehung usw $\Rightarrow$ Noether

Es ist nicht ganz leicht* den intuitiv „globalen" Charakter dieser Invarianzen in eine lokale Form umzuschreiben, aber so ungefähr geht es:

$$q_a \to q_a' := q_a + \varepsilon Q_a \quad , \quad \varepsilon \ll 1 ,$$

Q_a = „Generator" einer Koordinaten-transformation

$$\delta L := L(q', \dot q', t) - L(q, \dot q, t)$$

falls eine Invarianz existiert

$$\overset{!}{=} \varepsilon \frac{df}{dt}$$

kann erlaubt werden (vgl. Seite 26)

Auf der anderen Seite:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} \varepsilon Q_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} \varepsilon \dot Q_a$$

$$\overset{\text{Euler-Lagrange}}{=} \sum_a \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} \right) \varepsilon Q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} \varepsilon \dot Q_a \right\} = \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} Q_a \right)$$

Also gilt:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \Big[\underbrace{f - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} Q_a}_{\text{„Noether-Strom", } J} \Big] = 0 \quad \forall \varepsilon .$$

Beispiele:

* räumliche Translationen. Sei q_α zyklisch $\Rightarrow$ $Q_a = \delta_{a\alpha}$, $\dot Q_a = 0$, $f = 0$

$$\Rightarrow J = -\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} \delta_{a\alpha} = -p_\alpha .$$

* zeitliche Translationen. Jetzt ist $q_a' = q_a(t+\varepsilon) = q_a + \varepsilon \dot q_a \Rightarrow Q_a = \dot q_a$.
Weiterhin gilt:

$$\delta L = L(q', \dot q') - L(q, \dot q) = \varepsilon \frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow f = L$$

$$\Rightarrow J = L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} \dot q_a = -E .$$

---

* Andernfalls wäre das Theorem schon lange vor dem 20. Jahrhundert entdeckt worden!

Bemerkungen:

* Eine wichtige Eigenschaft der Erhaltungsgrößen ist Additivität:
  $\exists$ zwei Untersysteme A, B, die nicht mit einander wechselwirken, d.h. $L = L_A + L_B \Rightarrow J = J_A + J_B$ (weil J linear in L ist).

* Zeitliche und räumliche Translationen sowie Drehungen implizieren Erhaltungssätze; wie ist es mit Boosts? (Seite 7)

$$q'_a = q_a - \varepsilon u_a t \quad ; \quad Q_a = -u_a t$$
$$\dot q'_a = \dot q_a - \varepsilon u_a$$

Die Funktion f ist in diesem Fall nichttrivial; z.B., mit freien Massenpunkten,

$$\delta L = \sum_a \frac{m_a}{2}(\dot q'_a)^2 - \sum_a \frac{m_a}{2}\dot q_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2}\left(-2\varepsilon u_a \dot q_a + \varepsilon^2 u_a^2\right)$$
$$= \varepsilon \frac{df}{dt} + O(\varepsilon^2) \quad , \quad f = -\sum_a m_a u_a q_a$$
$$-\frac{\partial L}{\partial \dot q_a} Q_a = \sum_a m_a \dot q_a u_a t$$
$$\Rightarrow \quad J = \sum_a m_a u_a (\dot q_a t - q_a)$$

Ist also konstant ($\dot J = 0$), aber Wert hat etwas mit Anfangsortsvektor zu tun.

* Eine allgemeine Herleitung des Noether-Theorems (z.B. Goldstein 13.7) beinhaltet eine Transformation der Zeitkoordinate, $t \to t' = t + \varepsilon X$, sowie Transformationen der verallg. Koordinaten, $q_a(t) \to q'_a(t') = q_a(t) + \varepsilon Q_a$. Es wird wichtig sein, einen Unterschied zwischen $q'_a(t') - q_a(t)$ und $q'_a(t) - q_a(t)$ zu machen! Anfangspunkte sind „Forminvarianz",
  $L'(q'(t'), \dot q'(t'), t') = L(q'(t'), \dot q'(t'), t')$, und „Skaleninvarianz",
  $S' = \int_{t'_1}^{t'_2} dt'\, L'(q'(t'), \dot q'(t'), t') = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot q(t), t)$. Noether-Strom:
  $$J = \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a}\dot q_a - L\right) X - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a} Q_a .$$

* Dem Begriff „Skalentransformation" werden auch andere Bedeutungen gegeben, z.B.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot x^2 + \frac{\alpha}{x}\right) \quad ; \quad \begin{cases} t \to t \\ x \to \Delta x \end{cases}$$
$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot x^2 \Delta^2 + \frac{\alpha}{x}\Delta^{-1}\right)$$

Hamiltonsches Prinzip:

$$\left.\frac{dS'}{d\Delta}\right|_{\Delta=1} = 0 = 2\langle T\rangle + \langle V\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle T\rangle = -\frac{\langle V\rangle}{2} . \qquad \text{(vgl. Aufgabe 4.3)}$$