2. Lagrange - Formalismus

2.1. Das Prinzip der kleinsten Wirkung bzw. Hamiltonsches Prinzip

Hamilton: 1805–1865

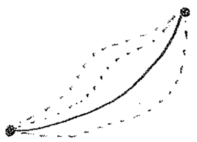
(auch Fermat, Maupertuis, d'Alembert)

Fermat: 1601–1665; Maupertuis: 1698–1759; d'Alembert: 1717–1783

Behauptung:

Massenpunkt bewegt sich laut Newton II im Potential V

$\Longleftrightarrow$



Massenpunkt wählt Bahnkurve mit extremalem (normalerweise minimalem) Wert einer Integralgröße, benannt Wirkung.

Um das Prinzip mathematisch darstellen zu können, führen wir eine neue Methode ein:

Variationsrechnung

Funktion: Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto y(x)$

Funktional: Abbildung $V \to \mathbb{R}$; $y \mapsto F[y]$

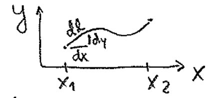
V = Raum von Funktionen (mit bestimmten Eigenschaften; meistens reell, stetig, differenzierbar)

Beispiele:

(i) $F[y] = y(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, y(x)\, \delta(x-x_0)$.

(ii) $F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y(x), y'(x), x)$, mit Funktion f.

(iii) Länge einer Bahnkurve:

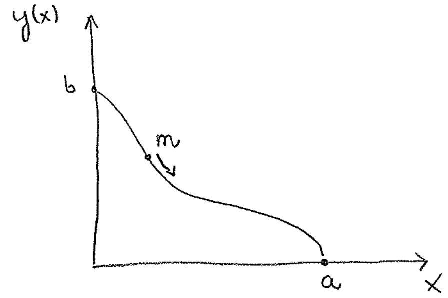


$$l = \int dl = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

(iv) Laufzeit im homogenen Schwerefeld bzw. das Brachistochronen*-Problem.

(Johann Bernoulli → Variationsrechnung)

Johann Bernoulli: 1667–1748; Jakob Bernoulli? (älterer Bruder)



Massenpunkt ruht am Anfang.
Reibung wird vernachlässigt.

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dl}{v} = \int_0^a dx \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x)}$$

Für $v(x)$ gilt (Energieerhaltung):

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg(b-y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad v = \sqrt{2g(b-y)}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^a dx \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}} .$$

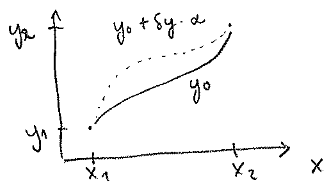
* brachistos = kürzeste
chronos = Zeit

Extremalisierung eines Funktionals

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y, y', x)\,.$$

Annahme: $F[y]$ hat für die Funktion y_0 ein Extremum, z.B. Minimum so dass $F[y] \geq F[y_0]$, für alle Funktionen mit $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Sei $\delta y(x)$ eine beliebige (stetige, differenzierbare) Funktion mit $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$.



Wenn wir jetzt $F[y_0 + \alpha\,\delta y]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, als Funktion von α betrachten, dann muss $\left.\dfrac{dF[y_0 + \alpha\,\delta y]}{d\alpha}\right|_{\alpha} = 0$ gelten.

(Und zwar für alle δy.)

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_0 + \alpha\,\delta y,\ y_0' + \alpha\,\delta y',\ x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\delta y\, \frac{\partial f}{\partial y} + \delta y'\, \frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{y = y_0}$$

Partielle Integration im zweiten Term:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{d\,\delta y}{dx}\, \frac{\partial f}{\partial y'} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{\frac{d}{dx}\left(\delta y\, \frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \delta y\, \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta y \left(-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \underbrace{\left[\delta y\, \frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0,\ \text{da } \delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta y(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Dieses muß für $\forall\, \delta y(x)$ gelten, insbesondere solche die nur in einer kleinen Umgebung vom bestimmten x nichtverschwindend sind

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \forall\, x}$$

„Euler-Gleichung"
1707 - 1783

Für N Funktionen y_a, $a = 1, .., N$, erhält man N Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y_a} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_a'} = 0 \quad \forall\, x, a\,.$$

(Wähle $\delta y_a \neq 0$ nur für einen bestimmten Wert von a, usw.)

Beispiel: Brachistochronen-Problem, d.h. $f = \dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{(b-y)^{3/2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \text{kompliziert} \ldots$$

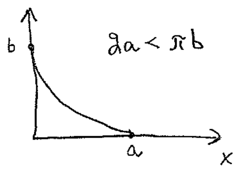
Aber bemerke: $$\frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right] = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial y} - y''\frac{\partial f}{\partial y'} = 0\,!$$

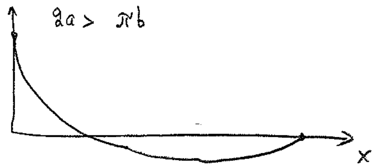
$\Rightarrow \quad y'\dfrac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{Konstante}$ „ein erstes Integral der Euler-Gleichung" (für den Fall, dass f keine explizite Abhängigkeit von x hat)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}} - \dfrac{1+(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}} = \text{Konstante}$

$\Rightarrow \quad [1+(y')^2][b-y] = \text{Konstante}' = +\dfrac{1}{\text{Konstante}^2}$.

Ohne Beweis: Lösung kann als $x(\phi) = A(\phi - \sin\phi)$, $b - y(\phi) = A(1-\cos\phi)$ parametrisiert werden, mit $\text{Konstante}' = 2A$ und $y' = \frac{dy}{d\phi}\cdot\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^{-1}$.
Dies ist eine „Zykloide".





—∘—

Hamiltonsches Prinzip

Das System wird durch verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ beschrieben, mit s „Freiheitsgraden". Diese brauchen nicht kartesisch zu sein! Für N Massenpunkte ist $s = 3N$, z.B.

$$\{q_i\} = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_N^1, x_N^2, x_N^3\} \quad \text{oder} \quad \{q_i\} = \{r_1, \theta_1, \varphi_1, \ldots, r_N, \theta_N, \varphi_N\}.$$

Die Zeitableitungen $\dot q_1, \ldots, \dot q_s$ werden verallgemeinerte Geschwindigkeiten benannt. Wir bezeichnen $q := (q_1, \ldots, q_s)$, $\dot q := (\dot q_1, \ldots, \dot q_s)$.

Lagrange- (1736–1813) Funktion: $L(q, \dot q, t) \in \mathbb{R}$ (L statt f, q statt y, t statt x)

Wirkung: $S[q] := \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot q, t)$.

Hamiltonsches Prinzip: $\delta S = 0$ (S extremal).

Kombiniert man $\delta S = 0$ mit Euler-Gleichung, bekommt man:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad \forall a}$$

„Euler-Lagrange-Gleichungen"

Diese sind Differentialgleichungen 2. Ordnung, genau wie Newton II.

Bemerkungen:

(i) Für ein gegebenes physikalisches System ist L nicht eindeutig.

$$L' := L + \frac{d}{dt} f \qquad ; \quad f = f(q,t)$$

$$\Rightarrow \qquad S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{df}{dt} = S + f(q_2,t_2) - f(q_1,t_1)$$

Die Zusatzterme bleiben bei der Variation $q \to q + \delta q$, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, unverändert $\Rightarrow$ sie haben keinen Einfluss auf die Euler-Lagrange-Gleichungen.

(ii) Das Prinzip an sich ist sehr allgemein: wir haben bis jetzt nichts genaueres bzgl. der Form von L angenommen, und haben deshalb viel Freiheit.

Behauptung: Für Massenpunkte im konservativen Kraftfeld ist $L = T - V$ eine Möglichkeit, mit $\vec{x}_a \leftrightarrow q$ und $\dot{\vec{x}}_a \leftrightarrow \dot{q}$.

Beweis:

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^{\,2} \quad , \quad V = V(\vec{x}_a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_a^i} = m_a \dot{x}_a^i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_a^i} = -\frac{\partial V}{\partial x_a^i}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} m_a \dot{x}_a^i = -\frac{\partial V}{\partial x_a^i} \qquad \forall a$$

$$\Leftrightarrow \quad m_a \ddot{\vec{x}}_a = -\nabla_a V \qquad \square$$
