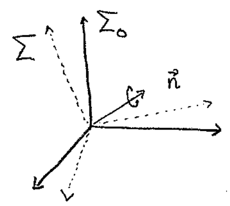
1.6 Scheinkräfte

Wir betrachten eine Koordinatentransformation, die keine Galilei-T. ist.
Insbesondere: eine zeitunabhängige Drehung sowie eine Translation mit konstanter Geschwindigkeit (Boost) sind Galilei-Transformationen, aber eine Drehung mit nichtverschwindender Winkelgeschwindigkeit ist es nicht!



Σ_0 = Inertialsystem, Koordinaten x_0^i

Σ = gegenüber Σ_0 rotierendes Koordinatensystem, Koordinaten x^i

Ursprünge fallen zusammen.
Beispiele: Karussel, Erde

Wir nehmen an, dass es eine t-abhängige Drehmatrix $R(t)$ gibt, so dass

$$\vec{x}_0 = R(t)\,\vec{x} \quad \text{für beliebige Ortsvektoren gilt.}$$

(Notabene: $R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow R$ ist invertierbar, mit $R^{-1} = R^T \Rightarrow \vec{x} = R^T(t)\,\vec{x}_0$.)

Im Inertialsystem gilt $m\ddot{\vec{x}}_0 = \vec{F}_0$; das Ziel ist jetzt, die Bewegungsgleichungen im rotierenden System (d.h. für $\vec{x}$) herzuleiten.

Zusammenhang der Geschwindigkeiten:

$$\dot{\vec{x}}_0 = R\,\dot{\vec{x}} + \dot{R}\,\vec{x}$$

Die Drehmatrix R hat spezielle Eigenschaften ($R^T R = \mathbb{1}\ \forall t$), und deshalb können wir auch mehr über $\dot{R}$ erfahren.
Schreibe:

$$\dot{R}(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[R(t+\tau) - R(t)\right]$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[R(t+\tau)\,R^{-1}(t) - \mathbb{1}\right] R(t)$$

Die Matrix $D(t) := R(t+\tau)\,R^{-1}(t)$ beschreibt zwei hintereinander folgende Drehungen, und ist damit selbst eine Drehmatrix
[$A^T A = \mathbb{1}$ & $B^T B = \mathbb{1} \Rightarrow (AB)^T AB = B^T A^T A B = \mathbb{1}$ „Drehungen bilden eine Gruppe"].

Für $\tau = 0$ ist $D = \mathbb{1}$; die allgemeine Form ist also

$$D = \mathbb{1} + \tau \Omega + \mathcal{O}(\tau^2) \qquad \text{(Taylor-Entwicklung)}.$$

Wie sieht Ω aus?

$$D^T = \mathbb{1} + \tau \Omega^T + \mathcal{O}(\tau^2)$$

$$\Rightarrow D^T D = \mathbb{1} + \tau\left(\Omega^T + \Omega\right) + \mathcal{O}(\tau^2) \overset{\text{weil Drehmatrix}}{=} \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \Omega^T = -\Omega$$

D.h., Ω ist eine antisymmetrische Matrix für $\forall\, t$.
Eine allgemeine antisymmetrische Matrix lässt sich als

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -w_0^3 & w_0^2 \\ w_0^3 & 0 & -w_0^1 \\ -w_0^2 & w_0^1 & 0 \end{pmatrix}$$

parametrisieren, wobei

$$\vec{w}_0 := \begin{pmatrix} w_0^3 \\ w_0^2 \\ w_0^1 \end{pmatrix}$$

die <u>Winkelgeschwindigkeit</u> benannt wird. (Sie könnte zeitabhängig sein, $\vec{w}_0(t)$.)

Jetzt also:

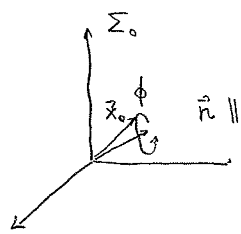
$$\underline{\underline{\dot{R}(t)}} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[D - \mathbb{1}\right] R(t) = \underline{\underline{\Omega(t) R(t)}} \quad ; \quad \underline{\underline{\Omega^T(t) = -\Omega(t)}}.$$

Für die Kombination $\dot{R}\vec{x}$ bekommen wir

$$\dot{R}\vec{x} = \Omega R \vec{x} = \Omega \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -w_0^3 & w_0^2 \\ w_0^3 & 0 & -w_0^1 \\ -w_0^2 & w_0^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0^2 x_0^3 - w_0^3 x_0^2 \\ w_0^3 x_0^1 - w_0^1 x_0^3 \\ w_0^1 x_0^2 - w_0^2 x_0^1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\vec{w}_0 \times \vec{x}_0}}.$$

Falls also Massenpunkt bzgl. Σ ruht, $\dot{\vec{x}} = 0$, dann gilt im Σ_0:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_0 &= R\dot{\vec{x}} + \dot{R}\vec{x} \\ &= \vec{w}_0 \times \vec{x}_0 \end{aligned}}$$



$\vec{n} \parallel \vec{w}_0$, $\frac{d\phi}{dt} = |\vec{w}_0|$

Im allgemeinen Fall:

$$\dot{R}\vec{x} = \Omega R\vec{x} = \vec{\omega}_0 \times (R\vec{x})$$

| schreibe $\vec{\omega}_0 = R\vec{\omega}$ wie bei $\vec{x}_0 = R\vec{x}$ (Vektor)

$$= (R\vec{\omega}) \times (R\vec{x})$$

$$= R(\vec{\omega} \times \vec{x})$$

$$[(R\vec{\omega}) \times (R\vec{x})]^i = \varepsilon^{ijk} R^{jm} \omega^m R^{kl} x^l \quad ;$$

$$\varepsilon^{ijk} R^{ip} R^{jm} R^{kl} = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\det(R)} \cdot \varepsilon^{pml} \quad \Big| \cdot R^{i'p} \; ;$$

$$R^{i'p} R^{ip} = (RR^T)^{ii'} = \delta^{ii'}$$

$$\varepsilon^{i'jk} R^{jm} R^{kl} = R^{i'p} \varepsilon^{pml}$$

$$\Rightarrow [(R\vec{\omega}) \times (R\vec{x})]^i = R^{ip} \varepsilon^{pml} \omega^m x^l = [R(\omega \times \vec{x})]^i \quad \square .$$

Also gilt:

$$\dot{\vec{x}}_0 = R(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x})$$

Und daher:

$$\ddot{\vec{x}}_0 = \underbrace{\dot{R}(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x})} + R(\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}})$$

$$\Omega R(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x}) = \vec{\omega}_0 \times \{R(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x})\} = (R\vec{\omega}) \times \{R(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x})\}$$

$$= R\{\vec{\omega} \times (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x})\}$$

$$= R\left(\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})\right) .$$

Schreiben wir weiterhin $\vec{F}_0 = R\vec{F}$ (Vektor), folgt aus $m\ddot{\vec{x}}_0 = \vec{F}_0$ die folgende Bewegungsgleichung für das rotierende System:

$$\underbrace{m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}}_{\text{wie NII}} - \underbrace{m\left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})\right]}_{\text{„Scheinkräfte"}}$$

Insbesondere: $m\ddot{\vec{x}} \neq 0$ auch bei $\vec{F} = \vec{F}_0 = \vec{0}$ $\Rightarrow$ kein Inertialsystem!

Für $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ (konstante Winkelgeschwindigkeit):

$$-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} = \text{„Coriolis-Kraft"}$$

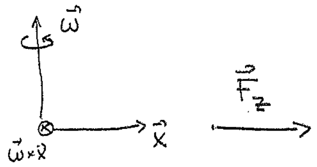
$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = \text{„Zentrifugalkraft"}$$

Zentrifugalkraft

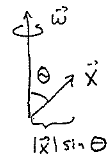
$\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})$

* bereits vorhanden wenn $\dot{\vec{x}} = 0$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$.

* Richtung :



* Betrag :



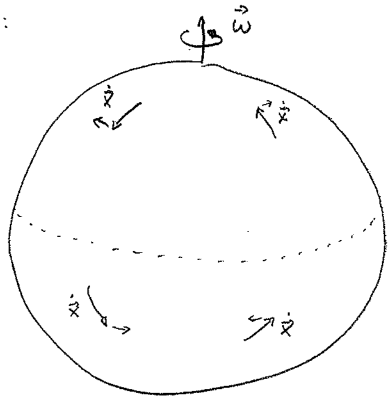
$|\vec{F}_Z| = m\omega^2 r \sin\theta$

Coriolis-Kraft

$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} = 2m\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}$

* abhängig von Geschwindigkeit

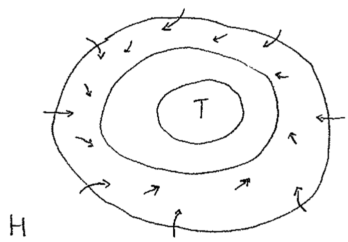
* Richtung :



* Betrag : $|\vec{F}_c| = 2m\omega\,|\dot{\vec{x}}_\perp|$

* Sehr wichtig in der Artillerie, Meteorologie, Flussdynamik, ...

Zyklon



(Nordhalbkugel)

—— ∘ ——