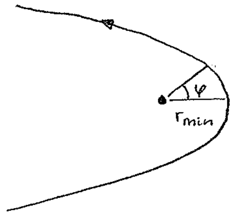
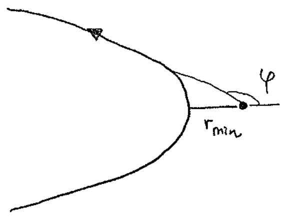
1.5. Streuung

Ungebundene Bewegung (Seite 14):

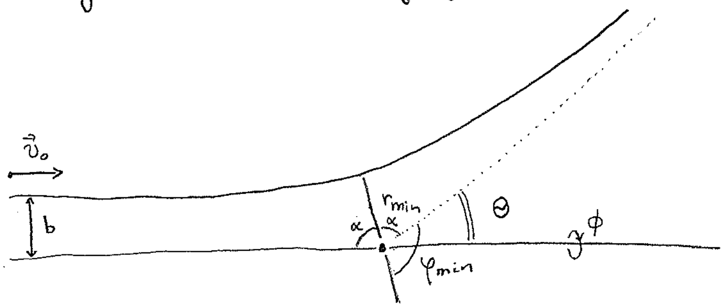


Kraft anziehend, Energie ≥ 0



Kraft abstoßend, Energie > 0

Betrachten wir jetzt diese Bewegung aus dem Sichtpunkt des „Kometen":



$\dot{\varphi} < 0$!

Man spricht von Stößen bzw. Streuung (z.B. des Positrons am Proton). Dies spielt eine sehr wichtige Rolle in der Kern- und Teilchenphysik.

$b =$ Stoßparameter

$\Theta =$ Streuwinkel

Beziehung von φ_{min} und Θ:

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + \Theta = \pi \\ \alpha + \varphi_{min} = \pi \end{cases}$$

$$\Theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2\left[\pi - \varphi_{min}\right] = 2\varphi_{min} - \pi$$

Wir nehmen an, dass das Potential für $r \to \infty$ verschwindet, $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$. Dann gilt:

$$\begin{cases} E = T + V \overset{r\to\infty}{=} \dfrac{\mu v_0^2}{2} & ; \quad v_0 = |\vec{v}_0| \\ \ell = |\mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = \mu b v_0 , \end{cases}$$

und die allgemeine Lösung auf Seite 12 kann umgeschrieben werden:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \frac{\ell}{\sqrt{2\mu\left[E - V(r')\right] - \ell^2/r'^2}}$$

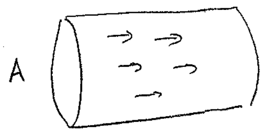
$$\left.\begin{array}{l} \dot{\varphi} < 0 \\ \Rightarrow \varphi - \varphi_0 \to \varphi_0 - \varphi \\ r_0 := r_{min} \\ \varphi_0 = \pi \\ r \to \infty \\ \varphi \to \varphi_{min} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \pi - \varphi_{min} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{\mu b v_0}{\sqrt{2\mu\left[\frac{\mu v_0^2}{2} - V(r)\right] - \frac{\mu^2 v_0^2 b^2}{r^2}}}$$

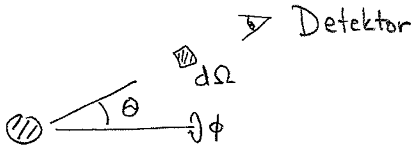
$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr \cdot b}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2V(r)}{\mu v_0^2} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad ; \quad \frac{2V(r_{min})}{\mu v_0^2} + \frac{b^2}{r_{min}^2} = 1$$

Wirkungsquerschnitt bzw. Streuquerschnitt

In der Kern- bzw. Teilchenphysik hat man in der Regel einen Strahl im Anfangszustand, d.h. mehrere Teilchen:



Teilchenstrahl



Streuzentrum bzw. „Target"

Wir nehmen an, dass alle Teilchen im Strahl

(i) den gleichen Impuls $\vec{p}$ haben;
(ii) gleichförmig über Querschnitt A verteilt sind.

Sei: N_p = Zahl der Projektile = Teilchen im Strahl
N_s = Zahl der Streuereignisse.

Definition des Wirkungsquerschittes, σ:

$$N_s = \frac{\sigma}{A} \cdot N_p ,$$

d.h.

$$\sigma := \frac{N_s}{N_p/A} = \frac{\left(\frac{N_s}{\text{Zeit}}\right)}{\left(\frac{N_p}{A \ \text{Zeit}}\right)}$$

← Ereignisrate

← Teilchenstromdichte bzw. Luminosität

„Die Ereignisrate ist Wirkungsquerschnitt mal Luminosität"

Zählt man Streuereignisse mit $\theta_1 < \theta < \theta_2$ kann man den entsprechenden Wirkungsquerschnitt als

$$\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \ \frac{d\sigma}{d\theta}$$

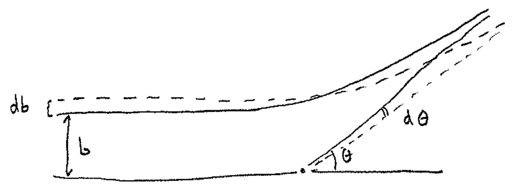
schreiben. Hier ist $\frac{d\sigma}{d\theta}$ der differentielle Wirkungsquerschnitt.
Falls es Abhängigkeit von Azimutalwinkel ϕ gibt, kann man auch $d\sigma/d\Omega$ definieren, mit $d\Omega := d\phi \, d\theta \sin\theta$.

Zusammenhang von Bahnkurve und $d\sigma / d\Theta$

Seite 15 : $\Theta = 2\varphi_{min} - \pi = \pi - 2[\pi - \varphi_{min}]$

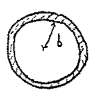
$$= \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr\, b}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad ; \quad \frac{V(r_{min})}{E} + \frac{b^2}{r_{min}^2} = 1 .$$

Das heißt, für gegebene E und $V(r)$ ist Θ eine Funktion von b:



Alle Teilchen mit Stoßparameter zwischen b und $b + db$ werden also in den Winkelbereich zwischen Θ und $\Theta - d\Theta$ gestreut.

Flächenelement :



$$d\sigma = 2\pi b\, db = 2\pi b \left|\frac{db}{d\Theta}\right| d\Theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi b \left|\frac{db}{d\Theta}\right|}$$

Beispiel : Streuung harter Kugeln : $V(r) = \begin{cases} \infty, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases}$

(Für zwei Billiardkugeln mit Masse m und Radius a: $\mu = \frac{m}{2}$, $R = 2a$)

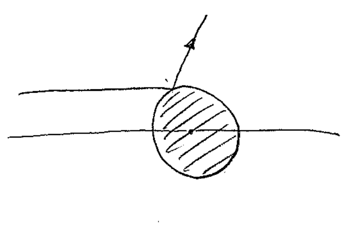
Nehme an: $b < R$ (für $b > R$ keine Streuung).

Was ist r_{min} ?

(a) $r_{min} < R$? $\quad \frac{\infty}{E} + \frac{b^2}{r_{min}^2} = 1 \quad ↯$

(b) $r_{min} > R \quad \frac{0}{E} + \underbrace{\frac{b^2}{r_{min}^2}}_{\substack{b<R \\ r_{min}>R}} = 1 \quad ↯$

$\Rightarrow r_{min} = R$



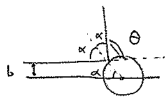
Dann ergibt sich: $\quad u=\frac{b}{r} \quad du = -\frac{b\,dr}{r^2}$

$$\Theta = \pi - 2\int_R^\infty \frac{dr\, b}{r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{r^2}}} = \pi + 2\int_{\frac{b}{R}}^{0}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi - 2\left[\operatorname{acos} u\right]_{\frac{b}{R}}^{0}$$

$$= \cancel{\pi} - \cancel{2\frac{\pi}{2}} + 2\operatorname{acos}\frac{b}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{b(\Theta) = R\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

Kann auch geometrisch verstanden werden!



$b = R\sin\alpha$

$\alpha = \frac{\pi-\Theta}{2}$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi b\left|\frac{db}{d\Theta}\right| = 2\pi R\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\cdot\frac{R}{2}\cdot\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\pi R^2}{2}\sin\Theta$$

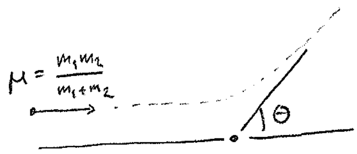
$$\Rightarrow \sigma = \int_0^\pi d\Theta\,\frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{\pi R^2}{2}\left[-\cos\Theta\right]_0^\pi = \pi R^2 \qquad \text{Ok!}$$

— ∘ —

Laborkoordinaten

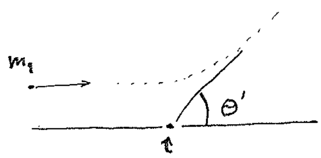
In manchen Fällen, z.B. bei Streuung von Billiardkugeln, sind „Laborkoordinaten" aus physikalischem Sichtpunkt sinnvoller als Schwerpunktkoord.

Schwerpunkt:



Schwerpunkt ruht die ganze Zeit.

Labor:



Teilchen 2 ruht am Anfang.

$$\vec{v}_\mu\Big|_{\text{Anfang}} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_\mu\Big|_{\text{Ende}} = v_0\begin{pmatrix}\cos\Theta \\ \sin\Theta\end{pmatrix}$$

Schwerpunkt ruht: $\dot{\vec{X}} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_\mu \\ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_\mu\end{cases}$ $\quad \xrightarrow{\text{Boost}}$ (Seite 7)

Seite 10

$$\vec{v}_2'\Big|_{\text{Anfang}} = \vec{v}_2\Big|_{\text{Anfang}} - \vec{u} := \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{v}_2\Big|_{\text{Anfang}} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_\mu\Big|_{\text{Anfang}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1'\Big|_{\text{Ende}} = \vec{v}_1\Big|_{\text{Ende}} - \vec{u} = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}\cos\Theta \\ \sin\Theta\end{pmatrix} + \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2}\begin{pmatrix}\cos\Theta + \frac{m_1}{m_2} \\ \sin\Theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\Theta' = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + \frac{m_1}{m_2}}}$$