1.4 Das Kepler-Problem

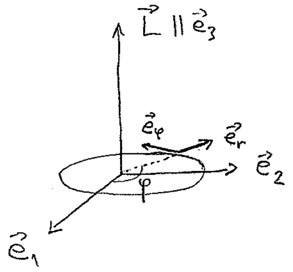
Eines der wichtigsten Beispiele für ein Zentralkraftproblem ist das Kepler-Problem, d.h. $\vec{F} = -\nabla V(r)$, $V(r) = -G\,\dfrac{m_1 m_2}{r}$,

G = Newtonsche Gravitationskonstante

Unser Ziel ist jetzt, die drei Keplerschen Gesetze aus Drehimpulserhaltung (Zentralkraft) und Energieerhaltung (Kraft konservativ) herzuleiten.

Wahl der Koordinaten

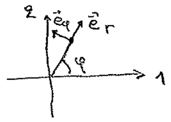
$\vec{L} = \mu\,\vec{x}\times\dot{\vec{x}} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\perp\vec{L}\,,\ \dot{\vec{x}}\perp\vec{L}$



$\Rightarrow$ $\vec{x}(t)$ bleibt $\forall t$ in einer Ebene $\perp\vec{L}$, und die Bahnkurve lässt sich durch Zylinderkoordinaten (r,φ) parametrisieren:

$$\vec{x}(t) = r(t)\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\\ 0\end{pmatrix} = r(t)\,\vec{e}_r(t)$$

Zur Erinnerung:

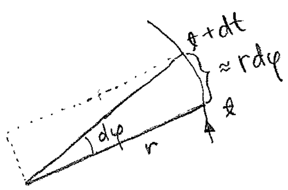


$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2$$
$$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\varphi = 0$$
$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Kepler II

(unabhängig von Form des Potentials $V(r)$!)

$$\vec{x} = r\,\vec{e}_r$$
$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{L} = \mu\,\vec{x}\times\dot{\vec{x}} = \mu r\,\vec{e}_r\times r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = \mu r^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_3$$
$$l := |\vec{L}| = \mu r^2\dot{\varphi} = \text{Konstante}$$



Flächenelement: $df = \frac{1}{2}\cdot r\cdot r\,d\varphi = \frac{r^2}{2}\cdot\dot{\varphi}\,dt$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{l}{2\mu} = \text{Konstante}$$

$\Rightarrow$ „Flächensatz", d.h. Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen.

(von Kepler aus Beobachtungen gefunden)

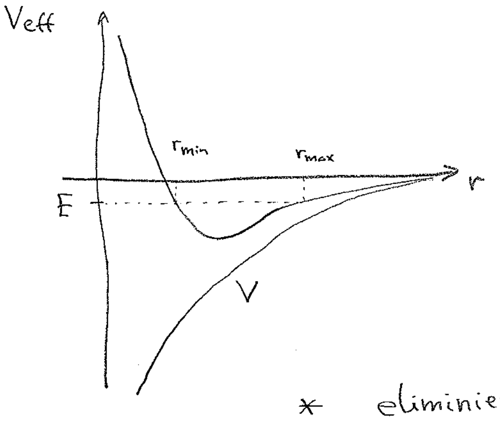
Bahnkurve

(i) Drehimpulserhaltung : $\mu r^2 \dot{\varphi} = l$ = Konstante

(ii) Energieerhaltung : $\frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$

$= E =$ Konstante

* (i) → (ii) $\Rightarrow$ $E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)}_{\equiv V_{eff}}$ „effektives Potential"



$\Leftrightarrow$ $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right]}$

Umkehrpunkte : $\dot{r} = 0$.

$E < 0$: „ gebunden" $(r_{max} < \infty)$

$E > 0$: „ ungebunden" $(r_{max} = \infty)$

* eliminiere dt mit Hilfe von (i) :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{l}{\mu r^2}$$

betrachte ablaufende Bewegung $(\dot{r} > 0)$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\mu r^2}{l}\dot{r} = \frac{r^2}{l}\sqrt{2\mu\left[E - V(r)\right] - \frac{l^2}{r^2}}$$

$$d\varphi = \frac{dr\, l}{r^2\sqrt{2\mu\left[E - V(r)\right] - \frac{l^2}{r^2}}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2}\frac{l}{\sqrt{2\mu\left[E - V(r')\right] - l^2/r'^2}} \quad ; \quad r_0 \geq r_{min},\ r \leq r_{max}$$

Explizite Lösung

Weitere Schritte benötigen eine Spezifizierung der Form von $V(r)$. Wir schreiben $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, mit $\alpha = G m_1 m_2 > 0$ für Schwerkraft ; für Coulomb-Kraft wäre $\alpha < 0$ (abstoßende Kraft) auch möglich.

$$\Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{\alpha}{r'}\right) - \frac{l^2}{r'^2}}} \quad ; \quad u = \frac{1}{r'}, \quad du = -\frac{dr'}{r'^2}$$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \, \frac{l}{\sqrt{2\mu(E + \alpha u) - l^2 u^2}}$$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu\alpha}{l^2} u - u^2}}$$

$$; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x - b/2}{\sqrt{a + b^2/4}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - b/2}{\sqrt{a + b^2/4}}\right)^2}}$$

$$= -\operatorname{acos}\left(\frac{x - b/2}{\sqrt{a + b^2/4}}\right) = -\operatorname{acos}\left(\frac{2x - b}{\sqrt{b^2 + 4a}}\right)$$

$$= \left[\operatorname{acos} \frac{\frac{2}{r} - \frac{2\mu\alpha}{l^2}}{\sqrt{\left(\frac{2\mu\alpha}{l^2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2\mu E}{l^2}}}\right]_{r_0}^{r}$$

Wähle $\varphi = \varphi_0$ bei $r = r_0$.

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{l^2}}{\frac{\mu\alpha}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu\alpha^2}}}$$

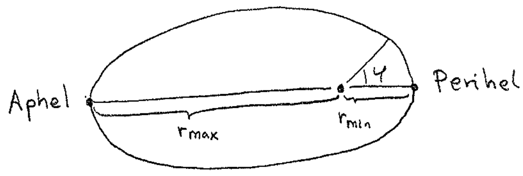
Definitionen: <u>Exzentrizität</u> $= e := \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{\mu\alpha^2}}$

$$p := \frac{l^2}{\mu\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad e\cos\varphi = \frac{p}{r} - 1$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}}$$

<u>Kepler I</u> : $(E < 0$ bzw. $e < 1)$



Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne in einem Brennpunkt $(r = 0)$.

(Aufgabe 3.2(a))

Periheldistanz $= \frac{p}{1+e}$

Apheldistanz $= \frac{p}{1-e}$

Kepler III

Ausgehend vom 2. Keplerschen Gesetz, $\frac{df}{dt} = \frac{\ell}{2\mu}$, wobei f die umgeschlossene Fläche bezeichnet, können wir die Umlaufzeit T bestimmen:

$$T = \frac{2\mu f}{\ell} .$$

Die Fläche f lässt sich wiederum durch die große Halbachse a ausdrücken (Aufgabe 3.2(c)) $\Rightarrow$

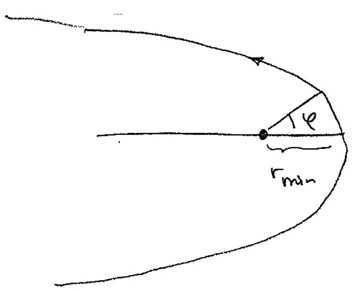
$$T^2 = a^3 \cdot \frac{(2\pi)^2 \mu}{\alpha} \overset{\alpha = G m_1 m_2,\ \mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)}{=} a^3 \frac{(2\pi)^2}{G} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2}$$

„Die Quadrate der Perioden verschiedener Planeten sind proportional zur dritten Potenz der großen Halbachsen ihrer Bahnen um die Sonne."

Ungebundene Bewegung

Umgebundene Bewegung kommt vor, falls

(a) Kraft anziehend $(\alpha > 0)$, Energie nicht-negativ $(E \geq 0,\ \varepsilon \geq 1)$



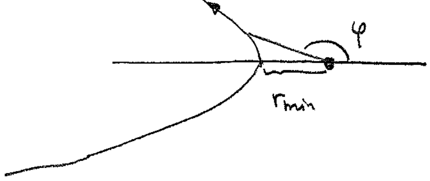
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \; ; \quad r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} \quad \text{für } \varphi = 0 ;$$

$$r \to \infty \quad \text{für } \cos\varphi \to \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^+ .$$

(b) Kraft abstoßend $(\alpha < 0)$. Lösung wie oben, aber $p = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$ wird negativ, $p = -|p|$, und $E > 0, \varepsilon > 1$;

$$r = \frac{-|p|}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \; ; \quad r_{min} = \frac{-|p|}{1 - \varepsilon} > 0 \quad \text{für } \varphi = \pi ;$$

$$r \to \infty \quad \text{für } \cos\varphi \to \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^- .$$



—— o ——