1.2. Galilei-Transformationen

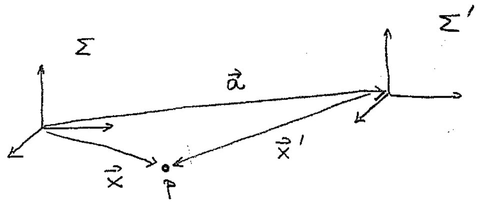
Wahl eines Inertialsystems ist nicht eindeutig. Transformationen der Koordinaten beim Übergang zwischen verschiedenen Inertial-Systemen bezeichnet man als Galilei-Transformationen.

(Wie wir später sehen werden, gibt es einen tiefen Zusammenhang zwischen bestimmten Invarianzen unter Galilei-Transformationen, und Erhaltungssätzen von Impuls, Drehimpuls und Energie.)

Eine allgemeine G.-T. besteht aus Translation, Drehung, und Boost.

Translation

(a) räumlich



Koordinaten des Punktes P bzgl. Σ': $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$.

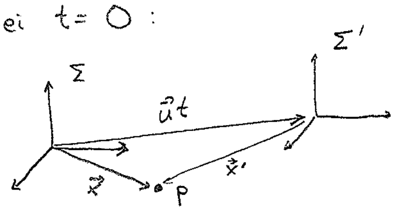
Falls es keine Kräfte gibt, und damit $\ddot{\vec{x}} = 0$ gilt, dann ist auch $\ddot{\vec{x}}' = 0$, d.h. Σ, Σ' sind beide Inertialsysteme.

(b) zeitlich

$$t' = t - \tau \quad ; \quad \frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \quad ; \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt'^2} = 0 .$$

Boost bzw. eigentliche Galilei-Transformation

Σ' bewege sich gegenüber Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$, und $\Sigma' = \Sigma$ bei $t = 0$:



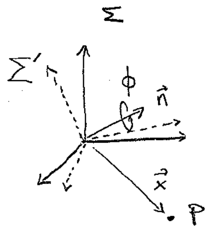
Koordinaten des Punktes P bzgl. Σ': $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t$.

Falls es keine Kräfte gibt:

$$\ddot{\vec{x}}' = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{x} - \vec{u}t) = \ddot{\vec{x}} = 0 .$$

D.h., Σ, Σ' sind beide Inertialsysteme.

Drehung bzw. Rotation



$\vec{n}$ = Drehachse
ϕ = Drehwinkel

Zusammenhang der Koordinaten: $|\vec{x}| = |\vec{x}'|$,
d.h. die Beziehung soll <u>linear</u> sein:

$$(x')^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij} x^j$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x}' = R\,\vec{x}$$

↳ 3×3 <u>Drehmatrix</u>, $R = \begin{pmatrix} R^{11} & R^{12} & R^{13} \\ R^{21} & R^{22} & R^{23} \\ R^{31} & R^{32} & R^{33} \end{pmatrix}$

Einschub über Tensoren

Tensor 0. Stufe: Skalar, d.h. invariant in Transformationen.

Tensor 1. Stufe: Vektor, $V'^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij} V^j$

Tensor 2. Stufe: Komponenten t^{ij} transformieren wie das Produkt $V^i W^j$, d.h.

$$t'^{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R^{ik} R^{jl} t^{kl}$$

Beispiel: Kronecker-Delta, δ^{ij}.

Tensor n-ter Stufe: $$t'^{i_1 \dots i_n} = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{3} R^{i_1 j_1} \dots R^{i_n j_n} t^{j_1 \dots j_n}$$

Kontraktion: Gleichsetzen zweier Indizes und Summation.

Einstein-Konvention: $$V^i W^i := \sum_{i=1}^{3} V^i W^i$$

$$t^{i_1 \dots i \dots i \dots i_n} := \sum_{i=1}^{3} t^{i_1 \dots i \dots i \dots i_n}$$

Ein invarianter Tensor n-ter Stufe:

Komponenten haben in jedem Koordinatensystem den gleichen Wert. Zum Beispiel:

$$\delta'^{ij} = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = R^{ik} R^{jk} = (RR^T)^{ij}$$

$$= \delta^{ij} \quad \text{falls } R \text{ \underline{orthogonal}}, \; RR^T = \mathbb{1}$$

Mit Levi-Civita:

$$\varepsilon'^{ijk} = R^{im} R^{jn} R^{kp} \varepsilon^{mnp} = \det(R) \cdot \varepsilon^{ijk}$$

$$= \varepsilon^{ijk} \quad \text{falls } R \text{ \underline{unimodular}}, \; \det(R) = 1$$

Definition der Drehungen: Längen von Vektoren ($|\vec{x}| = (\vec{x}\cdot\vec{x})^{\frac{1}{2}}$) und Winkel zwischen Vektoren ($\cos\Theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$) bleiben invariant, d.h.:

$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y} \text{ bleibt invariant } \forall\ \vec{x},\vec{y}}^{\dagger}$$

Invarianz erfordert:

$$\vec{x}'\cdot\vec{y}' = x'^i y'^i = R^{ij}R^{ik}x^j y^k = \delta^{jk}x^j y^k \quad \text{für beliebige } \vec{x},\vec{y},$$

d.h. $R^{ij}R^{ik} = \delta^{jk}$

In Matrixform:

$$\vec{x}'\cdot\vec{y}' = \vec{x}'^T\vec{y}' = \vec{x}^T R^T R\,\vec{y} = \vec{x}^T\vec{y} \quad \text{für beliebige } \vec{x},\vec{y},$$

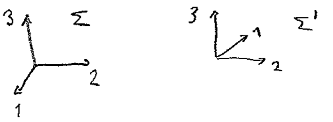
d.h. $R^T R = \mathbb{1}$

Notabene: $R^{ij}R^{ik} = (R^T)^{ji}R^{ik} = (R^T R)^{jk}$.

D.h., Drehungen verlangen eine <u>orthogonale</u> Drehmatrix R.

Als Folge: $\det(R^T R) = \det(R^T)\det(R) = (\det R)^2 = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1$.

Drehungen hängen stetig mit der Identität zusammen
$\Rightarrow \det R = +1$ für Drehungen.
Der Fall $\det R = -1$ entspricht einer <u>Spiegelung</u>, z.B.



Rechtssystem   Linkssystem

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun: $\ddot{\vec{x}}' = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}' = \frac{d^2}{dt^2}R\vec{x} = R\ddot{\vec{x}} = 0$ ohne Kräfte,

d.h. Σ, Σ' sind beide Inertialsysteme.

Bemerkungen:

* Jede Hintereinander-Ausführung von Galilei-Transformationen ist wieder eine Galilei-Transformation; mathematisch bilden die Transformationen eine "Gruppe".

* Ohne Beweis: Jede Galilei-Transformation lässt sich als Hintereinander-Ausführung von Boost, Translation und Rotation schreiben.

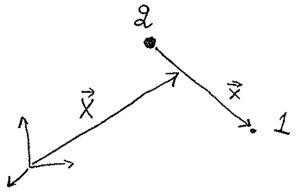
---

† Es könnte gezeigt werden, daß die Invarianz von Längen die Invarianz von Winkeln impliziert.

1.3 Zwei-Teilchen-System

Ortsvektoren $\vec{x}_a$, $a = 1, 2$; keine äußeren Kräfte.

Bewegungsgleichungen: $\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \end{cases}$.



Schwerpunktkoordinate+: $\vec{X} := \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$

Relativkoordinate: $\vec{x} := \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\vec{X}} = \dfrac{m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{\vec{F}_{21} - \vec{F}_{21}}{m_1 + m_2} = 0 \qquad \text{(Impulserhaltung)} \\[2ex] \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{21} = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{21} \end{cases}$$

Reduzierte Masse: $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Falls $\vec{F}_{21}$ nur von $\vec{x}$ abhängt, bekommen wir die Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{21}(\vec{x}),$$

d.h. Zwei-Teilchen-System lässt sich auf Bewegung <u>eines</u> Teilchens der Masse μ zurückführen! Dies ist eine große Vereinfachung.

Notabene: falls $m_2 \gg m_1$, gilt $\mu \approx m_1$, $\vec{X} \approx \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 = \vec{X} + \vec{x}$,
d.h. Massenpunkt 2 ruht auf Position $\vec{X}$.

— o —

Falls weiterhin $\vec{F}_{21}(\vec{x}) \parallel \vec{x}$ (z.B. Schwerkraft, Coulomb-Kraft), haben wir ein <u>Zentralkraftproblem</u>.

Wir schreiben $\vec{F}_{21}(\vec{x}) = f(r)\,\vec{e}_r$, $r := |\vec{x}|$.

Wie im Kapitel 1: $\vec{L} := \mu\, \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ bleibt erhalten.

— o —

+ Die inversen Transformationen: $\begin{cases} (m_1+m_2)\vec{X} = m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 \\ m_2 \vec{x} = m_2 \vec{x}_1 - m_2 \vec{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{X} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{x}$

$\begin{cases} (m_1+m_2)\vec{X} = m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 \\ -m_1 \vec{x} = -m_1 \vec{x}_1 + m_1 \vec{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{x}_2 = \vec{X} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{x}$