1. Newtonsche Mechanik

1.1 Grundbegriffe

* Raum : 3-dimensional, statisch, euklidisch.
  Es gibt kartesische Koordinatensysteme.
* Ortsvektor : $\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \vec{r} \in \mathbb{R}^3$
* Zeit: 1-dimensional, universal (überall synchronisiert)
* Massenpunkt : keine Struktur ; Masse m
* Bahnkurve : $\vec{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
* Geschwindigkeit : $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}$
* Beschleunigung : $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$
* Kraft : $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ Additiv : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$

Die Newtonschen Gesetze: (nicht wörtlich)

I. Es gibt Inertialsysteme, d.h. Koordinatensysteme in denen ein Massenpunkt, an den keine Kraft angreift, ruht oder gleichförmig bewegt, d.h. $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$.

II. In Inertialsystemen gilt $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$.

III. Die Kräfte, die zwei Massenpunkte auf einander ausüben, sind entgegengesetzt gleich, d.h. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.
1 auf 2

Bemerkungen :

* I ist Spezialfall von II.
* II definiert die "träge Masse" m des Massenpunktes.
* In II wird vorausgesetzt, dass $\vec{F}$ höchstens von $\vec{x}, \dot{\vec{x}}$ abhängt.
* Entscheidend in II ist, dass dort $\ddot{\vec{x}}$ auftritt und keine höheren Ableitungen wie $\dddot{\vec{x}}$. II ist also ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
* Wenn die Anfangsbedingungen $\vec{x}(0)$ und $\dot{\vec{x}}(0)$ und die Kraftfunktion $\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}})$ gegeben sind, gibt es eine eindeutige Lösung.

Beispiel: Massenpunkt im homogenen Schwerefeld mit Luftreibung.

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_R$$

$$\vec{F}_S = m_s \vec{g} \quad , \quad m_s = \text{"schwere Masse"}$$

Experimentell $m_s \propto m$ (alle Körper fallen gleich). Wählt man $m_s = m$, dann gilt $|\vec{g}| = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$ auf der Erde.

$$\vec{F}_R = -\alpha \vec{v} \quad , \quad \alpha = \text{eine Konstante}$$

"Stokessche Reibung"

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{x}} = m\vec{g} - \alpha\dot{\vec{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\vec{v}} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung!

(i) allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($\vec{v}_h$)

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\vec{v}_h \quad : \quad \vec{v}_h = v_h \cdot \vec{e}_0$$

$$\frac{dv_h}{v_h} = -\frac{\alpha}{m}dt$$

$$\ln v_h = -\frac{\alpha}{m}(t - t_0)$$

$$v_h = C_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

(ii) spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ($\vec{v}_s$)

$$\dot{\vec{v}}_s + \frac{\alpha}{m}\vec{v}_s = \vec{g} \quad ; \quad \text{versuche } \dot{\vec{v}}_s = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_s = \frac{m}{\alpha}\vec{g}$$

(iii) allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_s = C_1 \vec{e}_0 \, e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha}\vec{g}$$

(iv) fixiere Konstanten durch Anfangsbedingung:

$$\vec{v}(0) = C_1 \vec{e}_0 + \frac{m}{\alpha}\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 \vec{e}_0 = \vec{v}(0) - \frac{m}{\alpha}\vec{g}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(0)\, e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha}\vec{g}\left[1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right]$$

Anfangsgeschwindigkeit verschwindet wegen Reibung

Endzustand unabhängig von Anfangsbedingung.

(v) Bahnkurve: $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \int_0^t dt' \, \vec{v}(t') = \ldots$

Erhaltungssätze :

je mehr Erhaltungsgrößen wir kennen, desto genauer ist die Dynamik des Systems uns bekannt, auch ohne die Bewegungsgleichungen explizit lösen zu brauchen!

(a) Impulserhaltung

* Ein Teilchen : $\vec{p} := m\dot{\vec{x}}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

* Mehrere Teilchen, nur innere Kräfte :

$$\vec{p} := \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{x}}_a$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = \sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a = \sum_{a\neq b} \vec{F}_{ba} \quad \text{b auf a}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\left(\vec{F}_{ba} + \vec{F}_{ab}\right) = \vec{0} \quad \left(\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba} \text{ (Newton III)}\right)$$

$\Rightarrow$ $\vec{p}$ ist Erhaltungsgröße, obwohl es Kräfte gibt!

(b) Drehimpulserhaltung

* Ein Teilchen : $\vec{L} := \vec{x}\times\vec{p} = m\vec{x}\times\dot{\vec{x}}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = m(\underbrace{\dot{\vec{x}}\times\dot{\vec{x}}}_{\vec{0}} + \vec{x}\times\ddot{\vec{x}}) = \vec{x}\times\vec{F} \quad \text{"Drehmoment"}$$

* Mehrere Teilchen, nur innere Kräfte:

$$\vec{L} := \sum_a m_a \vec{x}_a \times \dot{\vec{x}}_a$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \ddot{\vec{x}}_a = \sum_{a\neq b} \vec{x}_a \times \vec{F}_{ba}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\left(\vec{x}_a\times\vec{F}_{ba} + \vec{x}_b\times\vec{F}_{ab}\right)$$

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba} \;\Rightarrow\; = \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}(\vec{x}_a - \vec{x}_b)\times\vec{F}_{ba}$$

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ ist Erhaltungsgröße, falls $\vec{F}_{ba} \parallel \vec{x}_a - \vec{x}_b$, wie z.B. bei der Schwerkraft und der Coulomb-Kraft!

(c) Energieerhaltung

* Falls $\vec{F}$ unabhängig von $\dot{\vec{x}}$ ist, nennt man $\vec{F}(t,\vec{x})$ ein <u>Kraftfeld</u>.
* Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ heißt <u>konservativ</u>, falls es ein <u>Potential</u>, $V(\vec{x})$, gibt, mit $\vec{F} = -\nabla V$.
* <u>Kinetische Energie</u> : $T := \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
* Energie : $E := T + V$.

$$\Rightarrow \dot{E} = \dot{T} + \dot{V}$$

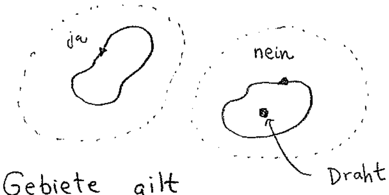
$$= m\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}}\cdot\nabla V(\vec{x})$$

$$= \dot{\vec{x}}\cdot\vec{F} - \dot{\vec{x}}\cdot\vec{F} = 0.$$

$\Rightarrow$ E ist Erhaltungsgröße, falls das Kraftfeld konservativ ist!

Wann ist das Kraftfeld konservativ?

Definition: ein Gebiet ist "einfach zusammenhängend", falls jede geschlossene Kurve sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt.



Behauptung: für einfach zusammenhängende Gebiete gilt

$$\vec{F} \text{ konservativ} \iff \nabla \times \vec{F} = 0 .$$

Beweis: "$\Rightarrow$" $\quad \vec{F} = -\nabla V . \Rightarrow -\nabla \times (\nabla V) = 0$ ← für jedes V

In Komponentenform mit Levi-Civita, ε^{ijk}:

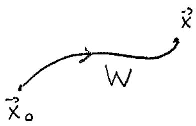
$$(\nabla \times \vec{F})^i = \sum_{jk} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} F^k$$

$$(\nabla \times (\nabla V))^i = \sum_{jk} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{2} \sum_{jk} \left(\varepsilon^{ijk} \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^k} + \varepsilon^{ikj} \frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^j} \right)$$

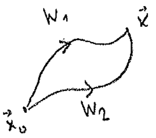
$$\varepsilon^{ikj} = -\varepsilon^{ijk} \Rightarrow \; = \frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^j} \right) = 0 .$$

"$\Leftarrow$" $\quad \vec{x}_0$ beliebig

Definiere $V(\vec{x}) := -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{s})$



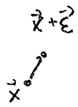
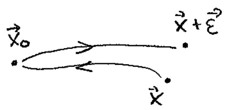
Definition ist unabhängig vom Integrationsweg W:



$$\int_{W_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} - \int_{W_2} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \oint_K d\vec{s} \cdot \vec{F}$$

$$\overset{\text{Stokes (da einfach zusammenhängend!)}}{=} \int_F d\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{W_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_{W_2} d\vec{s} \cdot \vec{F} .$$

Betrachte jetzt $W_1 =$  , $W_2 =$ 

Mit W_1: $\displaystyle \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{F}(\vec{x}) + O(\vec{\varepsilon}^2)$

Mit W_2: $\displaystyle -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{F} + \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} \underset{\text{Def.}}{=} V(\vec{x}) - V(\vec{x}+\vec{\varepsilon}) = -\vec{\varepsilon} \cdot \nabla V + O(\vec{\varepsilon}^2)$

Dies gilt für beliebiges $\vec{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla V \qquad \square .$$