Übungen zu Theoretische Physik I	**Blatt 10**	19.12.2008

Aufgabe 1: Gesucht ist das elektrische Potential eines homogen geladenen unendlich dünnen geraden Stabes (wählen Sie die z-Achse in Richtung des Stabes).

(a) Betrachten Sie zunächst einen unendlich langen Stab mit Ladung/Länge = λ. Skizzieren Sie die Vektoren des elektrischen Feldes. Nutzen Sie Symmetrie des Problems aus, um den Fluss des elektrischen Feldes durch einen endlich hohen Zylinder, der symmetrisch um den Stab herum liegt, zu berechnen. Bestimmen Sie daraus das elektrische Feld und das Potential.

(b) Betrachten Sie nun einen Stab der Länge $2a$ mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Geben Sie die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten an.

(c) Bestimmen Sie aus der Ladungsdichte das Potential $\phi(\vec{x})$. Erhalten Sie im Limes $a \to \infty$ das Potential aus (a)? Wie ergibt sich im Grenzfall $a \to 0$ das Coulomb-Potential (bei festem $q = 2a\lambda$)?

Aufgabe 2: Eine unendlich dünne Kreisscheibe vom Radius R sei homogen mit der Flächenladungsdichte σ belegt, was sich durch die Ladungsverteilung in Zylinder-Koordinaten

$$\rho(\vec{x}) = \sigma\, \Theta(R - r)\, \delta(x^3)\ , \quad r := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

beschreiben lässt.

(a) Wie groß ist das elektrostatische Potential $\phi(\vec{x})$ auf der x^3-Achse?

(b) Berechnen Sie die Gesamtladung Q, das Dipolmoment $\vec{P}$ und den Quadrupoltensor Q^{ij} dieser Ladungsverteilung.

(c) Geben Sie die Multipolentwicklung des Potentials bis zum Quadrupolterm an, und vergleichen Sie das Resulat für $\vec{x} = x^3\vec{e}_3$ mit dem exakten Resultat aus (a).

Aufgabe 3: Wie transformieren sich die Gesamtladung Q, das Dipolmoment $\vec{P}$ und der Quadrupoltensor Q^{ij} einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$

(a) unter Translationen des Koordinatenursprungs (mit Vektor $\vec{a}$),

(b) unter Drehungen des Koordinatensystems (mit Drehmatrix R)?

Zusatzaufgabe: Sei ϵ^{ijk} der Levi-Civita-Tensor und δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Einstein-Konvention wird angenommen. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \quad \epsilon^{ijk}\epsilon^{ljk} = 2\delta_{il}, \quad \epsilon^{ijk}\epsilon^{ijk} = 6;$

(b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a^i b^j \delta_{ij}, \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a^i b^j c^k \epsilon^{ijk}; \quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c};$

(c) $\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b}).$