Übungen zu Theoretische Physik I	**Blatt 3**	31.10.2008

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass für das Kepler-Problem mit $V(r) = -\alpha/r$ der Lenzsche Vektor $\vec{M} := \dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \alpha \vec{e}_r$ eine Erhaltungsgröße ist.

(b) In welcher Ebene liegt $\vec{M}$?

(c) Wählen Sie die Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = (r_0, 0, 0)$, $\dot{\vec{x}}(0) = (0, v_0, 0)$. Verwenden Sie die Erhaltung von Drehimpuls und Lenzschem Vektor um die Gleichung

$$y^2 = \lambda(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda(\lambda - 1)r_0 x + \lambda^2 r_0^2 \,, \quad \vec{x} = (x, y, 0)$$

mit $\lambda = m r_0 v_0^2/\alpha$ für die Bahnkurve herzuleiten. Für welche Werte der Parameter erhalten Sie Parabel, Kreis, Gerade, Hyperbel und Ellipse?

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie, dass die Kurve $r = p/(1 + \varepsilon \cos\varphi)$ für $\varepsilon \neq 1$ in geeignet gewählten kartesischen Koordinaten durch $(x/a)^2 \pm (y/b)^2 = 1$ beschrieben werden kann (mit $a, b > 0$). Das obere bzw. untere Vorzeichen entspricht dem Fall $\varepsilon < 1$ bzw. $\varepsilon > 1$. Geben Sie a und b als Funktionen von p und ε an.

(b) Drücken Sie a und b durch die Erhaltungsgrößen E und $\ell = |\vec{L}|$ aus.

(c) Zeigen Sie, dass für den Fall einer gebundenen Bewegung für die Umlaufzeit T die Relation $c^3/T^2 = \alpha/(4\pi^2\mu)$ gilt (3. Keplersches Gesetz), wobei $c = \max\{a, b\}$.

Aufgabe 3: Ein Massenpunkt der Masse μ bewege sich mit der Energie E und dem Drehimpuls $\ell = |\vec{L}|$ im Zentralpotential $V(r) = -\alpha/r^2$ ($\alpha > 0$).

(a) Berechnen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Skizzieren Sie es und diskutieren Sie an Hand Ihrer Skizze die Bahn des Teilchens qualitativ. Es gibt insgesamt drei verschiedene physikalisch sinnvolle Fälle für E und ℓ. Welche?

(b) Stellen Sie die Gleichung für $r(t)$ auf und berechnen Sie $t(r)$. Bei geeigneter Wahl des Nullpunktes von t erhalten Sie

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{\ell^2}{2\mu} + \alpha}$$

Unter welchen Umständen fällt ein Teilchen von einem Abstand r_0 ins Zentrum? Wenn es das tut, wie lange braucht es dafür?

(c) Stellen Sie die Gleichung für den Winkel φ auf und berechnen Sie $\varphi(r)$.

(d) Lösen Sie nach $r(\varphi)$ auf. Wie sehen die Bahnen aus?