Quantenfeldtheorie	**Übungsblatt Nr. 10**	11.01.2006

[Mo 16.01.2006, 12:30, S2-137]

Aufgabe 1: Betrachten wir ein paar wichtige Eigenschaften von SU(N_c).

(a) Sei $U(x)$ ein Feld mit Werten in SU(N_c). Zeigen Sie, daß gilt: $\mathrm{Sp}\,[\partial_\mu U U^\dagger] = 0$.

(b) Seien f^{abc} die Strukturkonstanten der SU(N_c), wie auf der Vorlesung definiert. Zeigen Sie, daß f^{abc} antisymmetrisch in allen Indexpermutationen sind.

Aufgabe 2: Betrachten wir "reine Yang-Mills-Theorie", d.h.

$$\mathcal{L}_M \equiv -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \; .$$

Wie lauten die entsprechenden klassischen Bewegungsgleichungen?

Aufgabe 3: Betrachten wir $C(x) \equiv \mathrm{Sp}\,[F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x)] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, wo $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische vier-dimensionale Levi-Civita-Tensor ist.

(a) Zeigen Sie, daß $C(x)$ eichinvariant ist.

(b) Zeigen Sie, daß $C(x)$ auch in Lorentz-Transformationen Λ invariant ist, falls $\det \Lambda = +1$ gilt.

(c) Verifizieren Sie, daß $C(x)$ als

$$\begin{aligned} C(x) &= \partial_\mu K^\mu(x) \; , \\ K^\mu(x) &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Big(A^a_\nu \partial_\rho A^a_\sigma + \frac{g}{3} f^{abc} A^a_\nu A^b_\rho A^c_\sigma \Big) \; , \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. [Wegen dieser Tatsache sollte $C(x)$ nach der Integration $\int \mathrm{d}^4x$ wohl keine Rolle in der Lagrange-Dichte spielen können.]

Aufgabe 4: Eine "Wilson-Linie" $W(x, x_0)$ in μ-Richtung erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} D_\mu(x) W(x, x_0) &= 0 \; , \\ W(x_0, x_0) &= \mathbb{1}_{N_\mathrm{c} \times N_\mathrm{c}} \; . \end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie die formale Lösung für $W(x, x_0)$.

(b) Überprüfen Sie, daß $W(x, x_0)$ in Eichtransformationen als

$$W(x, x_0) \to U(x) W(x, x_0) U^\dagger(x_0)$$

transformiert. [Damit erlaubt sie einen eichinvarianten Vergleich zweier Größen am x_0 und x. Wir nennen sie auch einen "Paralleltransporter".]