Quantenfeldtheorie	**Übungsblatt Nr. 08**	14.12.2005

[Mo 19.12.2005, 12:30, S2-137]

Aufgabe 1: Wir definieren den Fock-Raum für Fermionen genau wie für Bosonen, d.h.

$$|\vec{k}_1 ... \vec{k}_n\rangle = \hat{a}^\dagger_{\vec{k}_1} ... \hat{a}^\dagger_{\vec{k}_n} |0\rangle \ .$$

Überprüfen Sie das Pauli-Prinzip, d.h.

$$|\vec{k}_1 ... \vec{k}_i ... \vec{k}_j ... \vec{k}_n\rangle = -|\vec{k}_1 ... \vec{k}_j ... \vec{k}_i ... \vec{k}_n\rangle \ .$$

Aufgabe 2: Ausgehend von den Antikommutatoren für die fermionischen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, verifizieren Sie, daß gilt:

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(x^0,\vec{x}), i\hat{\psi}^\dagger_\beta(x^0,\vec{y})\right\} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\delta_{\alpha\beta} \ , \quad \alpha,\beta = 1,...,4 \ .$$

Hier ist $\hat{\psi}^\dagger_\beta \equiv \hat{\bar{\psi}}_\alpha \gamma^0_{\alpha\beta}$. Hinweis: Benutzen Sie die Vollständigkeitsrelation für die Spinoren $u(\vec{p},s)$, $v(\vec{p},s)$, sowie eine angemessene Substitution $\vec{p} \to -\vec{p}$ der Integrationsvariablen.

Aufgabe 3: Sei M eine 2×2-Matrix, $c^{*T} \equiv (c_1^* \ c_2^*)$, $c \equiv (c_1 \ c_2)^T$, und $S_E = c^{*T} M c$. Berechnen Sie das Grassmann-Integral

$$I(M) \equiv \int \mathrm{d}c_1^* \mathrm{d}c_1 \mathrm{d}c_2^* \mathrm{d}c_2 \ \exp(-S_E) \ .$$

Aufgabe 4: Mit S_E wie in Aufgabe 3, bestimmen Sie:

(a) $\langle c_1 c_1^* \rangle \equiv \dfrac{\int \mathrm{d}c_1^* \mathrm{d}c_1 \mathrm{d}c_2^* \mathrm{d}c_2 \ c_1 c_1^* \ \exp(-S_E)}{\int \mathrm{d}c_1^* \mathrm{d}c_1 \mathrm{d}c_2^* \mathrm{d}c_2 \ \exp(-S_E)}$,

(b) $\langle c_1 c_2^* \rangle$,

(c) $\langle c_2 c_1^* \rangle$,

(d) $\langle c_2 c_2^* \rangle$.

Können Sie eine kompakte Schreibweise für $\langle c_i c_j^* \rangle$ finden?