Quantenfeldtheorie	**Übungsblatt Nr. 02**	27.10.2005

[Mo 31.10.2005, 12:30, S2-137]

Aufgabe 1: Betrachten wir den harmonischen Oszillator, mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \;, \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}\,\hat{p} \;, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}\,\hat{p} \;.$$

Ausgehend von $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ und $[\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0$, zeigen Sie, daß gilt:

(a) $[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \;, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \;.$

(b) $\hat{H} = \omega\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\Big) \;.$

(c) $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ ist hermitesch, und hat reelle Eigenwerte.

(d) $\hat{N}|n\rangle \equiv n|n\rangle$ und $\langle n|n\rangle \equiv 1 \Rightarrow \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \;, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \;.$

Aufgabe 2: Wir haben in der Vorlesung $\hat{x}_H(t)$ für den harmonischen Oszillator bestimmt, ausgehend von den Bewegungsgleichungen — tun wir jetzt dasselbe mehr direkt.

(a) Zeigen Sie, daß gilt:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \ldots \;.$$

(b) Bestimmen Sie, mit Hilfe dieser Reihenentwicklung, den Operator

$$\hat{x}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t}\,\hat{x}\,e^{-i\hat{H}t} \;.$$

Aufgabe 3: Betrachten wir den Fock-Raum eines freien Skalarfeldes, und definieren

$$\begin{aligned} |\vec{k}_1, \vec{k}_2, ..., \vec{k}_n\rangle &\equiv \hat{a}^\dagger_{\vec{k}_1}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_2}...\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_n}|0\rangle \;, \\ \hat{N} &\equiv \int \mathrm{d}^3\vec{p}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} \;, \\ :\hat{H}: &\equiv \int \mathrm{d}^3\vec{p}\,E_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} \;. \end{aligned}$$

Was sind $\hat{N}|\vec{k}_1, \vec{k}_2, ..., \vec{k}_n\rangle$ und $:\hat{H}:|\vec{k}_1, \vec{k}_2, ..., \vec{k}_n\rangle$?

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie, daß $|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = |\vec{k}_2, \vec{k}_1\rangle$. [Das heißt, es handelt sich um Bosonen.]

(b) Was ist $\langle\vec{k}_1', \vec{k}_2'|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$?