7.3. Renormierung von zusammengesetzten Operatoren

Betrachten wir Green-Funktionen wie

$$G^{(m;n)}(y_1,\dots,y_m;x_1,\dots x_n) = \langle O(y_1)\dots O(y_m)\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle\,,$$

wo O zusammengesetzte Operatoren sind. Wie können wir solche Green-Funktionen renormieren? Seite 48: für ϕ, einfach durch Benutzung von ϕ_R, aber (Seite 104) das ist nicht genug für O.

Erste Schritt: Wir definieren

$$S_E' = S_E + \int d^4x\; \alpha(x)\,O(x)\,,$$

und dann

$$G^{(m;n)} = \frac{(-1)^m\,\delta^m}{\delta\alpha(y_1)\dots\delta\alpha(y_m)}\,\langle\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\rangle\Big|_{S_E';\,\alpha=0}.$$

Die Dimension von α: $\quad [\alpha] = \dfrac{\mathrm{GeV}^4}{[O]}$.

Das Prinzip: wir betrachten $\underline{\alpha(x) \text{ als ein neues Feld}}$!

Dann brauchen wir die Theorie zu renormieren genau wie wir eine gewöhnliche Wirkung renormieren, d.h.:

* Schreibe die allgemeinste mögliche Wirkung, die die gegebenen Symmetrien respektiert, und nur Kopplungskonstanten mit nicht-negativen Dimensionen hat.

* die Kopplungskonstanten werden als "nackte Parameter" betrachtet. Falls ihre divergenten Teile angemessen gewählt werden, bleiben alle Green-Funktionen endlich.

Zum Beispiel:

$$S_E = \int d^4x\,\left\{\tfrac{1}{2}\phi(-\partial_\mu^2+m^2)\phi + \tfrac{1}{4!}\lambda\phi^4\right\}$$

$$O(x) \equiv \phi^3(x)\,.$$

$$[\alpha(x)] = \mathrm{GeV}\,.$$

Die Theorie bleibt invariant in $\alpha\to-\alpha,\ \phi\to-\phi$!

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad S_E' = S_E + \int d^4x \Big\{ Z_1\, \alpha(x)\phi_R^3(x) + Z_2\, \alpha(x)\, \partial_\mu^2 \phi_R(x) + Z_3\, \alpha(x)\phi_R(x) + Z_4\, \alpha^2(x)\phi_R^2(x) + Z_5\, \alpha^3(x)\,\phi_R(x) + Z_6\, \alpha^2(x) + Z_7\, \alpha(x)\,\partial_\mu^2\alpha(x) + Z_8\, \alpha^4(x) \Big\}$$

Konsequenz:

$$\langle [O_R(x)\; O_R(y)]_R \rangle \equiv \frac{(-1)^2\delta^2}{\delta\alpha(x)\,\delta\alpha(y)} \ln \int \mathcal{D}\phi\; e^{-S_E'} \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \Big\langle \underbrace{\left[Z_1\phi_R^3(x) + Z_2\partial_\mu^2\phi_R(x) + Z_3\phi_R(x)\right]}_{\equiv O_R(x)} \underbrace{\left[Z_1\phi_R^3(y) + Z_2\partial_\mu^2\phi_R(y) + Z_3\phi_R(y)\right]}_{\equiv O_R(y)} \Big\rangle \quad (a)$$

$$- \delta^{(4)}(x-y)\left[2Z_4\langle\phi_R^2(x)\rangle + 2Z_6\right] \quad (b)$$

$$- \partial_\mu^2\delta^{(4)}(x-y)\left[2Z_7\right] \quad (c)$$

Hier: (a) $\Rightarrow$ Operatoren mischen sich mit allen gleich- und untererdimensionalen Operatoren.

(b) + (c) $\Rightarrow$ "Kontaktterme": die UV-Divergenzen von der Integration über kleinen Abständen können durch Z_4, Z_6, Z_7 gekürzt werden.

Die Renormierungskonstanten $Z_1 - Z_8$ sind nicht unbedingt alle unabhängig: wie immer, Substitutionen der Integrationsvariablen führen zu Identitäten.
Zum Beispiel: sei O eine Erhaltungsgröße,

$$O \to J_\mu, \quad \alpha \to \alpha_\mu, \quad \text{mit} \quad \langle \partial_\mu J_\mu \rangle = 0.$$

Dann erwarten wir:

$$Z'[\alpha_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)] = \int\mathcal{D}\phi\; \exp\Big\{\cdots - \int d^4x\; Z_1 \left[(\alpha_\mu + \partial_\mu\theta) J_\mu\right]\Big\}$$

$$= \int\mathcal{D}\phi\; \exp\Big\{\cdots - \int d^4x\; Z_1 \left[\alpha_\mu J_\mu - \theta\,\partial_\mu J_\mu\right]\Big\}$$

$$= Z'[\alpha_\mu(x)]$$

$\Rightarrow$ $Z'[\alpha_\mu(x)]$ besitzt eine Eichinvarianz!

7.4. Operatorproduktentwicklung (OPE)

[K.G. Wilson, Phys. Rev. 179 (1969) 1499; Phys. Rev. D3 (1971) 1818]

Betrachten wir jetzt

$$G_R^{(2;n)}(y_1,y_2;x_1,\dots,x_n) = \langle O_R(y_1)\,O_R(y_2)\,\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\rangle + \text{Kontaktterme}.$$

Sei $y_1 \approx y_2$, und die Erwartung, wie auf Seiten 101-102, daß das Verhalten durch kurze Distanzen dominiert wird. Wir schreiben:

$$y_1 \equiv y + \frac{v}{2}, \quad y_2 \equiv y - \frac{v}{2}.$$

Versuch:

$$O_R(y+\tfrac{v}{2})\,O_R(y-\tfrac{v}{2}) \approx O_R^2(y) + \frac{1}{4}v_\mu v_\nu\left[O_R(y)\,\partial_\mu\partial_\nu O_R(y) - \partial_\mu O_R(y)\,\partial_\nu O_R(y)\right] + \sum_{n=4}^{\infty} v_{\mu_1}\cdots v_{\mu_n}\, O^{(n)}\left[O_R(y),\partial_{\mu_1},\dots,\partial_{\mu_n}\right].$$

Kann aber nicht richtig sein:

$G_R^{(2;n)}(y_1,y_2;x_1,\dots,x_n)$ ist <u>endlich</u> für $y_1 \neq y_2$, aber die zusammengesetzten Operatoren auf der rechten Seite nicht! Jeder davon braucht eine neue Renormierung.

Das Problem ist, in einem technischen Sinne, daß der Limes $v \to 0$ und der Limes $\varepsilon \to 0$ sich nicht vertauschen.

Der richtige Weg:

$$O_R(y+\tfrac{v}{2})\,O_R(y-\tfrac{v}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(v;\bar{\mu})\, O_R^{(n)}(y;\bar{\mu})$$

Renormierungsskala

endliche "Wilson-Koeffizienten"

alle möglichen renormierten zusammengesetzten Operatoren mit den richtigen Symmetrien

Wir erwarten immer noch:

* $C_n(v;\mu) \sim v^{n-m}$, modulo Logarithmen wie $\ln(v\mu)$;
  m = Konstante, die naiv null sein sollte, aber kann auch positiv sein, falls $O_R^{(0)}$ sich mit niedrigerdimensionalen Operatoren mischt.

* $[O_R^{(n)}] = [O_R]^2\,\mathrm{GeV}^{n-m}$.

Das heißt, die Abhängigkeit von kurzen Abständen liegt in den (berechenbaren) Wilson-Koeffizienten; die Abhängigkeit von "langsamen" Variationen bzw. der "Schwerpunktkoordinate" $y = \frac{y_1+y_2}{2}$ liegt in Operatoren zunehmender Dimensionen.

Damit haben die Effekten der verschiedenen Skalen faktorisiert! Faktorisierung ist in der Tat der Schlüßelbegriff in der Betrachtung von Systemen mit einer Skalenhierarchie.

Nach Integration über v werden die Wilson-Koeffizienten Funktionen einer Massen- bzw. Impulsskala. Zum Beispiel:

Seite 101:
$$\int d^4x \; P_{\mu\nu}(x) \; T\left\{ \hat{J}_+^\mu(x) \left[\hat{J}_+^\nu(0)\right]^+ \right\} \quad \Big| \quad P_{\mu\nu}(x) = \int_p \frac{i\eta_{\mu\nu}\, e^{ip\cdot x}}{p^2 - m_W^2 + i\varepsilon}$$

$$= \int d^4x \; P_{\mu\nu}(x) \; T\left\{ \hat{J}_+^\mu\left(\tfrac{x}{2}\right) \left[\hat{J}_+^\nu\left(-\tfrac{x}{2}\right)\right]^+ \right\}$$

$$= \int d^4x \; P_{\mu\nu}(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\mu\nu)}(x;\bar{\mu})\, \hat{O}_R^{\mu\nu(n)}(0;\bar{\mu})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu;n}(m_W;\bar{\mu})\, \hat{O}_R^{\mu\nu(n)}(0;\bar{\mu}) \; .$$

$$C_n^{(\mu\nu)}(x;\bar{\mu}) \sim x^{n-m}$$

$$\left[h_{\mu\nu;n}\right] = [dx]^4 [dp]^4 \frac{1}{[p]^2} \left[C_n^{(\mu\nu)}\right] = \left[C_n^{(\mu\nu)}\right] \cdot \mathrm{GeV}^{-2}$$

$$\Rightarrow \; h_{\mu\nu;n} \sim \frac{1}{m_W^2} \cdot \left(\frac{1}{m_W}\right)^{n-m} \quad \text{mod} \quad \ln\left(\frac{\bar{\mu}}{m_W}\right) .$$

Die Erwartungswerte $\langle f | \hat{O}_R^{\mu\nu(n)} | i \rangle$ fühlen nur die kleinen Skalen ~ GeV; wir haben also ein Reihenentwicklung in $\left(\frac{\mathrm{GeV}}{m_W}\right)^n$, und es ist sicherlich genug, nur einige kleine n zu betrachten!
