

### 6.3 BRST - Invarianz

[ C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Commun. Math. Phys. 42 (1975) 127 ;  
I.V. Tyutin, unveröffentlicht ]

Die vorigen Kapitel :  $\exists$  globale Symmetrie  $\Rightarrow \exists$  Ward-Identitäten .

Auf der anderen Seite: eine lokale Symmetrie kann nur zusammen mit Eichfeldern existieren, aber die Quantisierung von Eichfeldern (zumindest im Kontinuumsformalismus) verlangt, daß die Symmetrie durch eine Eichbedingung gebrochen wird.

Fragen: \* Die Eichbedingung kann beliebig gewählt werden — Physik muß unabhängig von der Wahl sein. Also gibt es immer noch eine "Invarianz" — wie kann diese Tatsache mathematisch ausgedrückt werden ?

\* Gibt es ein Analogon der Ward-Identitäten für lokale Symmetrien ?

Antworten: \* Man kann in der Tat immer noch eine bestimmte, wenn auch komplizierte und nichtlineare Substitution der Integrationsvariablen finden, die zu einer Art von Ward-Identitäten, genannt Slavnov-Taylor-Identitäten, führt.

[ A.A. Slavnov, Theor. Math. Phys. 10 (1972) 99 ;  
J.C. Taylor, Nucl. Phys. B 33 (1971) 436 ]

\* Die BRST - Transformation :

eine globale Invarianz ;  
viel einfacher als Slavnov-Taylor ;  
führt zu denselben Identitäten ;  
aber verlangt einen Grassmann-artigen  
Transformationsparameter  $\delta\omega$  !

Die BRST-Invarianz gilt als eine sehr schöne und tiefe Entdeckung, und hat viele elegante mathematische Eigenschaften .  
Hier berühren wir natürlich nur die Oberfläche .

Anfangspunkt (Seite 79):

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\xi} G^a G^a + \bar{c}^a \left( \frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} \right) c^b,$$

Wo die Eichtransformation operiert als (Seite 79, 82):

$$\frac{\delta A_\mu^a}{\delta \theta^b} = \mathcal{D}_\mu^{ab}, \quad \mathcal{D}_\mu^{ab} \equiv \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A_\mu^c.$$

Sei jetzt  $\delta\bar{w}$  ein "infinitesimaler" ortsunabhängiger Grassmann-Parameter;  $(\delta\bar{w})^2 = 0$ .

\* Transformation 1/3:  $\delta A_\mu^a \equiv \mathcal{D}_\mu^{ab} c^b \delta\bar{w}$ .

Wie eine Eichtransformation mit einem bosonischen Parameter  $c^b \delta\bar{w} \Rightarrow \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$  bleibt invariant! Der zweite und dritte Term sind aber nicht invariant.

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1}{2\xi} G^a G^a \right) &= \frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^b} \delta A_\mu^b = \frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^b} \mathcal{D}_\mu^{bc} c^c \delta\bar{w} \\ &= \frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^b} \frac{\delta A_\mu^b}{\delta \theta^c} c^c \delta\bar{w} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} \delta\bar{w} c^b. \end{aligned}$$

Wir wählen also

\* Transformation 2/3:  $\delta \bar{c}^a \equiv +\frac{1}{\xi} G^a \delta\bar{w}$ .

Damit kürzt sich  $\delta \left( \frac{1}{2\xi} G^a G^a \right)$  und übrig bleibt nur  $\bar{c}^a \delta \left\{ \frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} c^b \right\}$ . Hier:

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \frac{\delta G^a}{\delta \theta^c} c^c \right\} &= \delta \left\{ \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^b} \mathcal{D}_\mu^{bc} c^c \right\} \\ &= \frac{\delta^2 G^a}{\delta A_\mu^b \delta A_\nu^e} \underbrace{\mathcal{D}_\nu^{ed} c^d \delta\bar{w}}_{\delta A_\mu^e} \mathcal{D}_\mu^{bc} c^c + \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^b} \delta \left\{ \mathcal{D}_\mu^{bc} c^c \right\} \\ &= \underbrace{-\frac{\delta^2 G^a}{\delta A_\mu^b \delta A_\nu^e} \mathcal{D}_\nu^{ed} c^d \mathcal{D}_\mu^{bc} c^c \delta\bar{w}}_{\text{symmetrisch: } (b \leftrightarrow e, \mu \leftrightarrow \nu)} = 0 + \underbrace{-\frac{\delta \mathcal{D}_\mu^{bc}}{\delta A_\mu^d} \mathcal{D}_\nu^{de} c^e c^c \delta\bar{w} + \mathcal{D}_\mu^{bc} \delta c^c}_{\text{antisymmetrisch: } (b \leftrightarrow e, \mu \leftrightarrow \nu)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta \mathcal{D}_\mu^{be}}{\delta A_\mu^d} \mathcal{D}_\nu^{dc} - \frac{\delta \mathcal{D}_\mu^{bc}}{\delta A_\mu^d} \mathcal{D}_\nu^{de} \right\} c^e c^c \delta\bar{w} + \mathcal{D}_\mu^{ba} \delta c^a \\ &= g f^{cea} \mathcal{D}_\mu^{ba} \delta c^a \end{aligned}$$

Aufgabe 13.3:  $\left\{ \dots \right\} = g f^{cea} \mathcal{D}_\mu^{ba} \delta c^a$

Diese Veränderung müssen wir mit  $\delta c^a$  kürzen, d.h.:

\* Transformation 3/3:  $\delta c^a \equiv -\frac{1}{g} g f^{cea} c^e c^c \delta\bar{w} = +\frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c \delta\bar{w}$ .

$\Rightarrow$  Die Theorie hat tatsächlich eine globale Invarianz!

Führen wir jetzt einen Trick ein: Weil  $\exp(-\frac{1}{2\xi} G^2) = G \int_{-\infty}^{\infty} dB \exp\left\{-\left[\frac{1}{2}\xi B^2 + iBG\right]\right\}$ ,  
 könnten wir auch die folgende Theorie betrachten:

$$\mathcal{L}'_E \equiv \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} \xi B^a B^a + iB^a G^a + \tau^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b}\right) c^b$$

Wir schreiben jetzt für alle Felder  $\phi \in \{A_\mu^a, \bar{c}^a, c^a, B^a\}$ :  $\delta\phi \equiv \Delta\phi \cdot \delta\bar{w}$ ,  
 wo  $\Delta$  der "BRST-Operator" ist:

$$\Delta \{A_\mu^a, \bar{c}^a, c^a, B^a\} \equiv \left\{ \mathcal{D}_\mu^{ab} c^b, iB^a, \frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c, 0 \right\}$$

Dann gilt:

- (a)  $\Delta \mathcal{L}'_E = 0$  [Beweis wie früher]
- (b)  $\Delta^2 \phi = 0$  ! [
  - $\Delta(\mathcal{D}_\mu^{ab} c^b) = 0$  : der dritte Teil auf Seite 98.
  - $\Delta(iB^a) = 0$  : Definition.
  - $\Delta\left(\frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c\right) = 0$  : Definition + Jacobi-Identität. (Aufgabe 13.4)
  - $\Delta(0) = 0$  : trivial. ]

Ein Operator mit der Eigenschaft  $\Delta^2 = 0$  wird "nilpotent" genannt.

Im Operatorformalismus erlaubt ein nilpotenter Operator drei Arten von Zuständen:

- $|\Psi_1\rangle \equiv$  Zustände mit  $\Delta|\Psi_1\rangle \neq 0$
- $|\Psi_2\rangle \equiv$  Zustände der Form  $\Delta|\Psi_1\rangle$ .  
 Wir bemerken, daß gilt  $\Delta|\Psi_2\rangle = 0$ .
- $|\Psi_0\rangle \equiv$  Zustände mit  $\Delta|\Psi_0\rangle = 0$ , die aber nicht von der Form  $\Delta|\Psi_1\rangle$  sind.

[ Formell sind diese Strukturen der "de Rham - Kohomologie" der Differentialgeometrie äquivalent. ]

- Physik [ohne Beweis] :
- $\Delta \hat{=}$  Transformation der Eichbedingung
  - $|\Psi_0\rangle \hat{=}$  physikalische Zustände : eichunabhängig ( $e^{i\bar{w}\Delta} |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle$ )  
 aber nicht Transformationen anderer Zustände.
  - $|\Psi_1\rangle \hat{=}$  nichtphysikalische Zustände, weil nicht eichunabhängig.
  - $|\Psi_2\rangle \hat{=}$  nichtphysikalische Zustände, weil Transformationen anderer Zustände.

S-Matrix soll nur für  $|\Psi_0\rangle$  definiert werden!

## Bedeutung

- \* Die Theorie besitzt also eine globale Symmetrie.
- \* Falls die Fermion-Darstellungen bzw. die elektrischen Ladungen "gesund" sind, ist diese Symmetrie nicht-anomal.  
[vgl. Seite 96]
- \* Die Symmetrie führt zu Ward-Identitäten [vgl. Seite 89].
- \* Es gibt Ward-Identitäten auch für die generierenden Funktionale [vgl. Seite 92 und Aufgabe 12.4].
- \* Die Ward-Identitäten für die generierenden Funktionale sind "Differentialgleichungen", und können unter bestimmten Umständen gelöst werden.  
  
Insbesondere: Divergenzen können nur in Koeffizienten von Polynomen niedriger Ordnung auftauchen [vgl. Seite 42]. Die Lösung für diesen Teil verrät, ob alle Divergenzen in  $Z$ -Faktoren versteckt werden können, d.h., ob die Theorie renormierbar ist. QCD: ja!
- \* Es gilt auch als möglich zu zeigen, daß  $S$ -Matrix-Elemente für  $|\psi_0\rangle$ -artige Zustände, sowie Green-Funktionen, die mit eichinvarianten Operatoren definiert worden sind, unabhängig von  $\xi$  bzw. von der Eichfunktion  $G^a$  sind.

Literatur: • C. Itzykson, J.B. Zuber,  
Quantum Field Theory, Kapitel 12-4.  
• J. Zinn-Justin,  
Quantum Field Theory and Critical Phenomena,  
Kapitel 21.