5.5. Asymptotische Freiheit

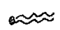
[D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343 ; H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346 ; Physik-Nobel 2004 ; schon früher G. 't Hooft, aber nicht veröffentlicht !]

Unser Ziel ist die Berechnung von Z_g, und damit $\mu \frac{d}{d\mu} g_R^2(\mu)$.
Seite 84: es reicht, den quadratischen Teil in $\Gamma[B]$ zu bestimmen.

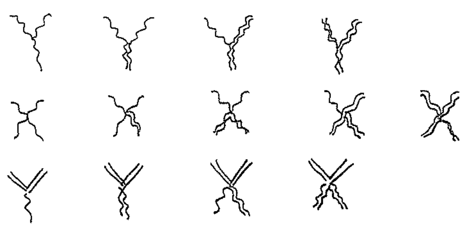
Seite 82-83:

$$e^{\Gamma[B]} = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c \; \exp\left\{ -\int d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(A+B) F^a_{\mu\nu}(A+B) + \frac{1}{2\xi} \mathcal{D}^{ab}_\mu(B) A^b_\mu \, \mathcal{D}^{ac}_\nu(B) A^c_\nu \right.\right.$$
$$\left.\left. + \, \mathcal{D}^{ca}_\mu(B)\bar{c}^a \, \mathcal{D}^{cb}_\mu(A+B) c^b \right] \right\}$$

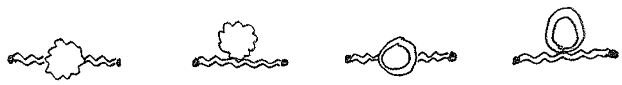
mit
$$F^a_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$
$$\mathcal{D}^{ab}_\mu(A) = \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^c_\mu \quad .$$

Graphisch: $\underbrace{A^a_\mu A^b_\nu} \equiv$ $\quad B^a_\mu \equiv$  $\quad \underbrace{c^a \bar{c}^b} \equiv$

Vertizes:



1PI-Diagramme, quadratisch in B^a_μ und von der Ordnung g_B^2:



Propagatoren: (Seite 80)

$$\underbrace{\tilde{A}^a_\mu(P)\tilde{A}^b_\nu(Q)} = \delta^{ab} \delta\!\!\!{}^-(P+Q) \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{P^2} + (\xi - 1)\frac{P_\mu P_\nu}{P^4} \right], \qquad \underbrace{\tilde{c}^a(P)\tilde{\bar{c}}^b(Q)} = \delta^{ab} \delta\!\!\!{}^-(P-Q) \frac{1}{P^2} .$$

Baumniveau (g_B^0):

$$\Gamma^{(2)}[B] = - \int_X \frac{1}{2} \partial_\mu B^a_{B\nu} \left[\partial_\mu B^a_{B\nu} - \partial_\nu B^a_{B\mu} \right]$$

$$= - \int_{P,Q} \frac{1}{2} \tilde{B}^a_{B\mu}(P) \tilde{B}^a_{B\nu}(Q) \, \delta\!\!\!{}^-(P+Q) \left[P^2 \delta_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu \right] .$$

Berechnung von 

Wir brauchen den Vertex 

* aus $\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(A+B) F^a_{\mu\nu}(A+B)$ [Seite 80]:

$$\int_{P,Q,R} \frac{1}{g}\, \delta(P+Q+R)\, \tilde{A}^a_\mu(P)\, \tilde{B}^b_\nu(Q)\, \tilde{A}^c_\rho(R)\; i g f^{abc} \left[\delta_{\mu\rho}(P_\nu - R_\nu) + \delta_{\rho\nu}(R_\mu - Q_\mu) + \delta_{\nu\mu}(Q_\rho - P_\rho) \right]$$

* aus $\frac{1}{2\xi} \mathcal{D}^{ab}_\mu(B) A^b_\mu\, \mathcal{D}^{ac}_\nu(B) A^c_\nu$ [Seite 85]:

$$\int_x \frac{1}{2\xi} \left\{ \partial_\mu A^a_\mu\, g f^{abc} B^b_\nu A^c_\nu + g f^{acb} B^c_\mu A^b_\mu\, \partial_\nu A^a_\nu \right\}$$

$$= \int_{P,Q,R} \frac{1}{g}\, \delta(P+Q+R)\, \tilde{A}^a_\mu(P)\, \tilde{B}^b_\nu(Q)\, \tilde{A}^c_\rho(R)\; i g f^{abc} \left[\frac{1}{\xi} P_\mu \delta_{\rho\nu} - \frac{1}{\xi} R_\rho \delta_{\mu\nu} \right]$$

Dann: $\exp(-S_I) = 1 - S_I + \frac{1}{2} S_I^2 + \dots$

$$\Rightarrow\; + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{g^2}{4}\right) \cdot f^{abc} f^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \int_{PQR} \int_{\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}} \Big\langle \delta(P+Q+R)\, \tilde{A}^a_\mu(P)\, \tilde{B}^b_\nu(Q)\, \tilde{A}^c_\rho(R) \left[\delta_{\mu\rho}(P_\nu - R_\nu) + \delta_{\rho\nu}\left(R_\mu - Q_\mu + \frac{P_\mu}{\xi}\right) + \delta_{\nu\mu}\left(Q_\rho - P_\rho - \frac{R_\rho}{\xi}\right) \right] \times$$
$$\delta(\tilde{P}+\tilde{Q}+\tilde{R})\, \tilde{A}^{\tilde{a}}_{\tilde{\mu}}(\tilde{P})\, \tilde{B}^{\tilde{b}}_{\tilde{\nu}}(\tilde{Q})\, \tilde{A}^{\tilde{c}}_{\tilde{\rho}}(\tilde{R}) \left[\delta_{\tilde{\mu}\tilde{\rho}}(\tilde{P}_{\tilde{\nu}} - \tilde{R}_{\tilde{\nu}}) + \delta_{\tilde{\rho}\tilde{\nu}}\left(\tilde{R}_{\tilde{\mu}} - \tilde{Q}_{\tilde{\mu}} + \frac{\tilde{P}_{\tilde{\mu}}}{\xi}\right) + \delta_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}\left(\tilde{Q}_{\tilde{\rho}} - \tilde{P}_{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{R}_{\tilde{\rho}}}{\xi}\right) \right] \Big\rangle$$

Farben: $f^{abc} f^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} = N_c \cdot \delta^{b\tilde{b}}$

Impulse:
$\tilde{P} = -P$
$R = -P - Q$
$\tilde{R} = -R = P + Q$
$\tilde{Q} = -\tilde{P} - \tilde{R} = -Q$

$$\Rightarrow\; + \frac{g^2 N_c}{4} \cdot \int_Q \tilde{B}^b_\nu(Q)\, \tilde{B}^b_{\tilde{\nu}}(-Q) \int_P \left[\frac{\delta_{\mu\tilde{\mu}}}{P^2} + (\xi - 1) \frac{P_\mu P_{\tilde{\mu}}}{P^4} \right] \left[\frac{\delta_{\rho\tilde{\rho}}}{(P+Q)^2} + (\xi - 1) \frac{(P_\rho + Q_\rho)(P_{\tilde{\rho}} + Q_{\tilde{\rho}})}{(P+Q)^4} \right]$$
$$\times \left[\delta_{\mu\rho}(2P_\nu + Q_\nu) - \delta_{\rho\nu}\left(2Q_\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) P_\mu\right) + \delta_{\nu\mu}\left(\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_\rho - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) P_\rho\right) \right]$$
$$\times \left[\delta_{\tilde{\mu}\tilde{\rho}}(2P_{\tilde{\nu}} + Q_{\tilde{\nu}}) - \delta_{\tilde{\rho}\tilde{\nu}}\left(2Q_{\tilde{\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) P_{\tilde{\mu}}\right) + \delta_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}\left(\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Q_{\tilde{\rho}} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) P_{\tilde{\rho}}\right) \right]$$

Der Eichparameter ξ ist beliebig, und muß sich am Ende in physikalischen Größen kürzen. Anscheinend ist die Abhängigkeit in einzelnen Diagrammen aber recht nicht-trivial. Darum bietet die Unabhängigkeit eine gute Kontrollmethode an. Auf der anderen Seite können wir aber eine angemessene Wahl treffen, wobei die Berechnung leichter wird.

Im Folgenden: $\xi \equiv 1 \Leftrightarrow$ "Feynman-Eichung".

Für $\xi = 1$ und $\delta_{\mu\mu} = d \equiv 4-2\varepsilon$:

$$\frac{1}{P^2(P+Q)^2}\, \delta_{\mu\tilde\mu}\,\delta_{\varrho\tilde\varrho} \left[\delta_{\mu\varrho}(2P_\nu + Q_\nu) - 2\delta_{\varrho\nu} Q_\mu + 2\delta_{\nu\mu} Q_\varrho \right]\left[\delta_{\tilde\mu\tilde\varrho}(2P_{\tilde\nu} + Q_{\tilde\nu}) - 2\delta_{\tilde\varrho\tilde\nu} Q_{\tilde\mu} + 2\delta_{\tilde\nu\tilde\mu} Q_{\tilde\varrho} \right]$$

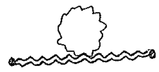
$$= \frac{1}{P^2(P+Q)^2} \Big\{ d(2P_\nu + Q_\nu)(2P_{\tilde\nu} + Q_{\tilde\nu}) - 2Q_{\tilde\nu}(\cancel{2P_\nu} + Q_\nu) + 2Q_{\tilde\nu}(\cancel{2P_\nu} + Q_\nu)$$
$$- 2Q_\nu(\cancel{2P_{\tilde\nu}} + Q_{\tilde\nu}) + 4\delta_{\nu\tilde\nu} Q^2 - 4Q_\nu Q_{\tilde\nu}$$
$$+ 2Q_\nu(\cancel{2P_{\tilde\nu}} + Q_{\tilde\nu}) - 4Q_\nu Q_{\tilde\nu} + 4\delta_{\nu\tilde\nu} Q^2 \Big\}$$

Letztendlich, nach "Exponenzierung":

$$\delta\Gamma^{(2)}[B] = \frac{g^2 N_c}{4} \int_Q \tilde B^a_\mu(Q)\,\tilde B^a_\nu(-Q) \int_P \frac{1}{P^2(P+Q)^2} \left\{ d(2P_\mu + Q_\mu)(2P_\nu + Q_\nu) + 8\delta_{\mu\nu} Q^2 - 8Q_\mu Q_\nu \right\}$$

Die anderen Diagramme (Übung):

$$\delta\Gamma^{(2)}[B] = \frac{g^2 N_c}{4} \int_Q \tilde B^a_\mu(Q)\,\tilde B^a_\nu(-Q) \int_P \frac{1}{P^2(P+Q)^2} \begin{array}{l} \left\{ -2(2P_\mu + Q_\mu)(2P_\nu + Q_\nu) \right\} \\ \left\{ -2d\,\delta_{\mu\nu}\,(P+Q)^2 \right\} \\ \left\{ +4\,\delta_{\mu\nu}\,(P+Q)^2 \right\} \end{array}$$



Insgesamt:

$$\delta\Gamma^{(2)}[B] = \frac{1}{2}\int_Q \tilde B^a_\mu(Q)\,\tilde B^a_\nu(-Q)\,\Pi_{\mu\nu}(Q) \quad ;$$

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) \equiv \frac{1}{2} g^2 N_c \int_P \frac{1}{P^2(P+Q)^2} \Big\{ 4(d-2)P_\mu P_\nu + 2(d-2)(P_\mu Q_\nu + P_\nu Q_\mu) + (d-10)Q_\mu Q_\nu$$
$$+ 8\delta_{\mu\nu} Q^2 + 2(2-d)\,\delta_{\mu\nu}\,(P+Q)^2 \Big\}$$

Aufgabe 12.1 : $\quad Q_\mu Q_\nu \Pi_{\mu\nu}(Q) = 0$

$$\Rightarrow \Pi_{\mu\nu}(Q) = f(d, Q^2)\cdot\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}\right)\cdot\frac{g^2 N_c}{2} \qquad \Big|\cdot\delta_{\mu\nu}$$

$$f(d, Q^2) = \frac{1}{d-1}\cdot\int_P \frac{1}{P^2(P+Q)^2}\left\{ 4(d-2)P^2 + 4(d-2)P\cdot Q + (d-10)Q^2 + 8dQ^2 + 2d(2-d)(P+Q)^2 \right\}$$

$\hookrightarrow P\cdot Q = \frac{1}{2}\left[(P+Q)^2 - P^2 - Q^2\right]$

$$= \frac{1}{d-1}\int_P \frac{1}{P^2(P+Q)^2}\left\{ 2(d-2)P^2 + 2(d-2)(1-d)(P+Q)^2 + (9d-10-2d+4)Q^2 \right\}$$

In dimensionaler Regularisierung : $\displaystyle\int_P \frac{1}{(P+Q)^2} = \int_P \frac{1}{P^2} = 0 \;!$ [Seite 44]

$$\int_P \frac{1}{P^2(P+Q)^2} = \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln\frac{\mu^2}{Q^2} + O(1)\right) \quad \text{[Aufgabe 12.2]}$$

$$\Rightarrow f(4-2\varepsilon, Q^2) = Q^2\cdot\frac{7d-6}{d-1}\int_P \frac{1}{P^2(P+Q)^2}\Bigg|_{d=4-2\varepsilon} = Q^2\cdot\frac{\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\cdot\frac{22}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} + O(1)\right).$$

Nach Addition zum Baumniveau [Seite 85]:

$$\Gamma^{(2)}[B] = -\frac{1}{2}\int_Q \tilde{B}^a_{B\mu}(Q)\,\tilde{B}^a_{B\nu}(-Q)\left[Q^2\delta_{\mu\nu} - Q_\mu Q_\nu\right]\left[1 - \frac{g_B^2\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\cdot\frac{11N_c}{3}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1)\right)\right].$$

Seite 84:

$*$ $\tilde{B}_B\tilde{B}_B = Z_B\,\tilde{B}_R\tilde{B}_R$ und $g_B^2 = g_R^2\,(1 + \underbrace{[Z_g - 1]}_{\mathcal{O}(g_R^2)})$.

$*$ $\Gamma[B]$ ist endlich, sowie $Z_B \cdot Z_g$

$$\Rightarrow \quad Z_B = 1 + \frac{g_R^2\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\,\frac{11N_c}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g_R^4).$$

$$\Rightarrow \quad Z_g = 1 - \frac{g_R^2\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\,\frac{11N_c}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g_R^4).$$

Dann folgt die Renormierungsgruppengleichung wie auf Seite 51:

$$g_B^2 = g_R^2\left[1 - \frac{g_R^2\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\,\frac{11N_c}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g_R^4)\right] \qquad \Big|\ \mu\frac{d}{d\mu}$$

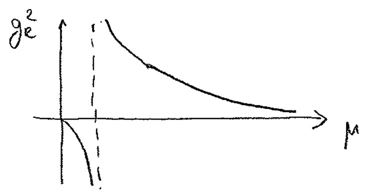
$$0 = \mu\frac{d}{d\mu}g_R^2 + \frac{g_R^4}{(4\pi)^2}\cdot\frac{22N_c}{3} + \mathcal{O}(g_R^6) + \mathcal{O}(g_R^4\varepsilon)$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \quad \mu\frac{d}{d\mu}g_R^2 = \frac{\beta_0}{(4\pi)^2}\cdot g_R^4 + \mathcal{O}(g_R^6), \qquad \beta_0 = -\frac{22N_c}{3} \ !$$

Wie auf Seite 51 aber mit einem entgegengesetzten Vorzeichen!

Lösung [vgl. Seite 52]:

$$g_R^2(\mu) \approx \frac{(4\pi)^2}{|\beta_0|\ln\frac{\mu}{\mu_0}}$$



Mit N_f Quarks [Übung]: $\beta_0 \to \dfrac{-22N_c + 4N_f}{3}$.

Welche physikalische Bedeutung hat dieses Ergebnis?

$\Rightarrow$ andere Vorlesungen, z.B. Elementarteilchenphysik, QCD, Gitterfeldtheorie, ...