5.4. Effektive Wirkung und Hintergrundfeldmethode

Seite 40:

$\Gamma[\varphi]$ = generierende Funktional für 1PI Green-Funktionen

$\equiv$ effektive Wirkung.

Definition:

$$e^{W[J]} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi] + \int_x \phi(x) J(x)}$$

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int_x \varphi(x) J(x) \quad ; \quad \varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad ; \quad J(x) = -\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)}$$

$$\Rightarrow e^{\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi] + \int_x [\phi(x) - \varphi(x)] J(x)}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi] - \int_x [\phi(x) - \varphi(x)] \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)}}$$

Substitution von Integrationsvariablen: $\phi \equiv \varphi + \phi'$.

Für ein unendliches Viervolumen können wir weiterhin, ohne Konsequenzen, nur nichtverschwindende Fourier-Impulse in ϕ' behalten, d.h.,

$$\tilde{\phi}'(0) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_x \phi'(x) \equiv 0 \; !$$

Falls jetzt $\varphi(x)$ eine Konstante ist, bekommen wir [R. Jackiw, Phys. Rev. D 9 (1974) 1686]

$$e^{\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi' \, e^{-S_E[\varphi + \phi']} \Big| \text{Terme linear in } \phi' \text{ wegfallen lassen!}$$

Dieses Ergebnis entspricht formal der Sattelpunktsnäherung und kann, unter Umständen, auch für nicht-konstante φ verallgemeinert werden.

— o —

In Eichfeldtheorien bricht die Kopplung $\int_x \phi(x) J(x) \rightarrow \int_x A^a_\mu(x) J^a_\mu(x)$ die Eichinvarianz. Das heißt, $\Gamma[\mathcal{A}^a_\mu]$ ist im Allgemeinen weder eichinvariant in $\mathcal{A}^a_\mu \rightarrow \mathcal{A}^{a\,\prime}_\mu$, noch unabhängig von ξ.

Für $J^a_\mu(x) = 0$, d.h. $\delta\Gamma[\mathcal{A}^a_\mu] / \delta\mathcal{A}^a_\mu(x) = 0$, bekommen wir allerdings die Unabhängigkeit zurück: physikalische Observablen werden damit nur "auf der Massenschale" bzw. "für Lösungen der Bewegungsgleichungen", $\delta\Gamma[\mathcal{A}^a_\mu] / \delta\mathcal{A}^a_\mu(x) = 0$, definiert sein.

Die Bestimmung von Γ kann durch die Benutzung von <u>Hintergrundeichung</u> vereinfacht werden [z.B. Abbott, Nucl. Phys. B 185 (1981) 189].

Die Idee: weil $\Gamma[\mathcal{U}^a_\mu]$ eichabhängig ist, können wir für jedes $\mathcal{U}^a_\mu$ eine andere Eichung benutzen, so daß $\Gamma[\mathcal{U}^a_\mu]$ eine angemessene Symmetrie entwickelt, womit seine Bestimmung leichter wird.

Notation:

* Hintergrundfeld $(\mathcal{U}^a_\mu)$ in Hintergrundeichung $\equiv B^a_\mu$.
* Seien $\Phi \equiv \Phi^a T^a$ und $D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu$. Dann ist

$$[D_\mu, \Phi] = \partial_\mu \Phi^a T^a - ig\,[A^a_\mu T^a, \Phi^b T^b]$$
$$= \partial_\mu \Phi^a T^a + g f^{abc} A^a_\mu \Phi^b T^c \equiv T^a \mathcal{D}^{ab}_\mu(A)\Phi^b,$$

wo $\mathcal{D}^{ab}_\mu(A) = \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^c_\mu$ die "kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung" genannt wird.

Die Definition:

(a) vor Verschiebung:

* $S_E[A^a_\mu]$
* $G^a \equiv -\mathcal{D}^{ab}_\mu(B)(A^b_\mu - B^b_\mu)$
* $\delta A^c_\mu / \delta\theta^b = \mathcal{D}^{cb}_\mu(A)$ Seite 79

$$\Rightarrow \frac{\delta G^a}{\delta\theta^b} = -\mathcal{D}^{ac}_\mu(B)\mathcal{D}^{cb}_\mu(A)$$

(b) nach Verschiebung:
$\left(\begin{array}{c}\phi \to \varphi + \phi' \\ \Leftrightarrow A \to B + A\end{array}\right)$

* $S_E[A^a_\mu + B^a_\mu]$
* $G^a = -\mathcal{D}^{ab}_\mu(B) A^b_\mu$
* $\frac{\delta G^a}{\delta\theta^b} = -\mathcal{D}^{ac}_\mu(B)\mathcal{D}^{cb}_\mu(A+B)$

$$e^{\Gamma[B]} = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\, e^{\exp}\left\{-S_E[A^a_\mu + B^a_\mu] - \int_x \left[\frac{1}{2\xi} G^a G^a + \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta\theta^b}\right) c^b\right]\right\}$$

(Diese Formel könnte eventuell auch als eine Definition betrachtet werden.)

Betrachten wir jetzt die Transformation (vgl. S.79)

$$B_\mu \to B'_\mu \equiv U B_\mu U^+ - \frac{i}{g} \partial_\mu U U^+ .$$

Wir machen gleichzeitig eine Substitution der Integrationsvariablen:

$$A_\mu \to U A_\mu U^+,$$
$$\bar{c} \to U \bar{c} U^+,$$
$$c \to U c U^+ , \qquad \text{wo} \quad \bar{C} \equiv \bar{c}^a T^a, \quad C \equiv c^a T^a .$$

Damit wird

$$A_\mu + B_\mu \to U(A_\mu + B_\mu) U^+ - \frac{i}{g} \partial_\mu U U^+ .$$

Zeigen wir, daß $\Gamma[B]$ in dieser Eichtransformation invariant bleibt :

(i) $S_E[A^a_\mu + B^a_\mu]$ ist invariant, weil es sich um eine Eichtransformation handelt.

(ii) $$T^a \mathcal{D}^{ab}_\mu(B') A'^b_\mu = [D'_\mu, A'_\mu]$$
$$= [U D_\mu U^+, U A_\mu U^+] = U [D_\mu, A_\mu] U^+$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} G^{a'} G^{a'} = Sp[T^a G^{a'} T^b G^{b'}] = Sp[G'G'] = Sp[UGU^+UGU^+] = Sp[GG]$$

$\Rightarrow$ Eichterm ist invariant.

(iii) Der Geist-Term kann als

$$\int_x \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b}\right) c^b = \int_x 2\, Sp\{[D_\mu(B), \bar{c}][D_\mu(A+B), c]\}$$

geschrieben werden [Aufgabe 11.3], und ist damit auch invariant.

(iv) Weil $A'^a_\mu A'^a_\mu \overset{(*)}{=} 2\, Sp[A'_\mu A'_\mu] = 2\, Sp[A_\mu A_\mu] = A^a_\mu A^a_\mu$, handelt es sich um eine orthogonale Transformation. Daher ist $\det[\delta A'^a_\mu / \delta A^b_\mu] = 1$, und das Integrationsmaß ist invariant.

Dasselbe gilt für $\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c$.

$\Longrightarrow$ $\square$.

(*) Hier keine Summation über μ !

Konsequenzen

Wir haben gelernt (Seite 51), daß die Renormierungsgruppengleichung für die renormierte Kopplungskonstante g_R^2 aus dem "Z-Faktor" Z_g hergeleitet werden kann. Wir zeigen jetzt, daß die Hintergrundeichung eine einfache Methode für die Bestimmung von Z_g anbietet.

(A.) $g_B \equiv Z_g^{\frac{1}{2}} g_R \quad ; \quad B_B \equiv Z_B^{\frac{1}{2}} B_R$

Seite 83 : $\Gamma[B]$ ist eichinvariant, falls mit den nackten Parametern ausgedrückt.

$$\Longrightarrow \quad \Gamma[B] = \int_x \underbrace{C}_{\text{Konstante}} \; Sp\left[F_{\mu\nu,B}\, F_{\mu\nu,B}\right] + O(B_B^5)$$

symbolisch

$$\equiv \int_x C \cdot \left[\partial_\mu B_B \partial_\mu B_B + g_B \partial_\mu B_B B_B^2 + g_B^2 B_B^4\right] + O(B_B^5) \quad \text{(vgl. S. 80)}$$

$$= \int_x C \cdot \left[Z_B (\partial_\mu B_R)^2 + Z_B^{\frac{3}{2}} Z_g^{\frac{1}{2}} g_R \partial_\mu B_R B_R^2 + Z_B^2 Z_g g_R^2 B_R^4\right] + O(B_B^5) .$$

(B.) Seite 40 : $\Gamma[B] \sim \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma_B^{(n)} B_B^n \quad ; \quad \Gamma_B^{(n)} \sim A_{B,C}^{(n)}$

Seite 48 : $A_{B,C}^{(n)} \sim Z_B^{-n/2} A_{R,C}^{(n)} \quad ; \quad B_B^n = Z_B^{+n/2} B_R^n$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma[B] \sim \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma_B^{(n)} B_B^n = \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma_R^{(n)} B_R^n$$

$\Longrightarrow$ $\Gamma[B]$ ist endlich, falls mit renormierten Größen ausgedrückt.

(A.) + (B.) $\Longrightarrow$ $C \cdot Z_B$ ist endlich !

$\Longrightarrow$ $Z_B \cdot Z_g$ ist endlich !

$\Longrightarrow$ die Divergenz in Z_g wird durch Z_B bestimmt.

Z_B kann aber durch den quadratischen Teil in $\Gamma[B]$ berechnet werden. Dies macht die Hintergrundeichung bequem. Im Allgemeinen würde man sowohl den quadratischen als auch den kubischen bzw. biquadratischen Teil brauchen.

[Aufgabe 11.4]

— o —