5.2. Quantisierung der Eichfelder

Um die Eichfelder zu quantisieren, versuchen wir die Theorie in eine Form umzuschreiben, wo sie äquivalent einer Theorie mit kanonisch normalisierten Skalarfeldern aussieht. Danach können wir unsere alten Ergebnisse übernehmen.

Das Ziel ist ein Pfadintegral für zeitgeordnete Green-Funktionen im euklidischen Formalismus (d.h. nach der Wick-Drehung).

Das Wesentliche ist, was mit dem Argument der Exponentialfunktion passiert. Seiten 30, 31:

klassisch:		kanonisch quantisiert:		Pfadintegral:
$x,\ p = \dot{x}$		$\hat{x},\ \hat{p}$		
$H(x,p)$	$\Rightarrow$	$\hat{H}(\hat{x},\hat{p})$	$\Rightarrow$	$\int \mathcal{D}x \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi} \exp\left\{-\int d\tau \left[ip\dot{x} + H(x,p)\right]\right\}$
$(m=1)$		$\exp(-\beta\hat{H})$		

Um die Notation möglichst einfach zu halten, betrachten wir den abelschen Fall [d.h. $U(1)$ statt $SU(N_c)$]. Das Endergebnis läßt sich aber leicht verallgemeinern.

Die Komplikation: Eichinvarianz! Wir brauchen eine Eichung, um kanonische Variablen zu finden, die tatsächlich unabhängig sind.

* Eichinvarianz für $U(1)$:

$$A'_\mu = U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \Big|_{U \equiv e^{ig\theta}},\ \theta \in \mathbb{R}$$

$$= A_\mu + \partial_\mu \theta$$

* Kanonische "Koordinaten" (?):

A_μ, oder einige davon.

* Kanonische "Impulse" (?):

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \left(-\frac{1}{2} F_{\rho\mu} F^{\rho\mu}\right) \Bigg|_{F_{0\mu} = \partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0}$$

$$= -F^{0\mu} = F_{0\mu} \equiv \underset{\uparrow\ \text{elektrisches Feld}}{E_\mu} \quad ; \ \mu \neq 0 .$$

Wir wählen die ("axiale") Eichung $\underbrace{G(x)}_{\text{"Eichfunktion"}} \equiv A_3(x) \equiv 0$.

Damit sind wir in der folgenden Lage:

* A_1, A_2 sind gute kanonische Koordinaten ;
  E_1, E_2 sind die entsprechenden Impulse
* $E_0 = 0 \Rightarrow A_0$ keine Koordinate !
* $A_3 = 0 \Rightarrow E_3$ kein Impuls !

Also was sollten wir mit A_0, $E_3 = -\partial_3 A_0$ tun ?

Wir können eine Zwangsbedingung stellen, um A_0 und E_3 durch $A_{i'}, E_{i'}$, $i' \equiv 1,2$, auszudrücken! Erinnern wir uns z.B. an die klassischen Bewegungsgleichungen (Aufgabe 10.2). Im abelschen Fall:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \ \nu .$$

Nehme $\nu = 0$:

$$-\partial_i F_{i0} = 0 \Leftrightarrow \partial_i E_i = 0 \Leftrightarrow \partial_3 E_3 = -\partial_{i'} E_{i'} \quad , \quad \text{wo } i \equiv 1,2,3 .$$

Diese Zwangsbedingung wird das <u>Gauß - Gesetz</u> genannt.

$\therefore$ E_3 wird durch E_1, E_2 bestimmt, und A_0 dann durch E_3.

Überprüfen wir letztendlich, ob wir nach diesen Überlegungen die Hamilton-Funktion tatsächlich durch $A_{i'}, E_{i'}$ ausdrücken können:

* $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} F_{0i} F_{0i}$; $\frac{1}{2} F_{0i} F_{0i} = \frac{1}{2} \partial_0 A_i F_{0i} - \frac{1}{2} \underbrace{\cancel{\partial_i A_0 F_{0i}}}_{0 \ [\text{Partielle Integration + Gauß}]}$
  $= \frac{1}{2} \partial_0 A_{i'} F_{0i'}$ $[A_3 = 0]$
* $\mathcal{H} = $ "$p\dot{x} - \mathcal{L}_M$"
  $= F_{0i'} \partial_0 A_{i'} - \mathcal{L}_M = \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \partial_0 A_{i'} F_{0i'}$
* $\frac{1}{2} \partial_0 A_{i'} F_{0i'} = \frac{1}{2} F_{0i'} F_{0i'} + \frac{1}{2} \partial_{i'} A_0 F_{0i'}$
  $= \frac{1}{2} (E_{i'})^2 - \frac{1}{2} A_0 \partial_{i'} F_{0i'}$
  $= \frac{1}{2} (E_{i'})^2 + \frac{1}{2} A_0 \partial_3 F_{03}$
  $= \frac{1}{2} (E_{i'})^2 - \frac{1}{2} \partial_3 A_0 F_{03} = \frac{1}{2} (E_{i'})^2 + \frac{1}{2} (E_3)^2$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} (E_{i'})^2 + \frac{1}{2} \{ \underbrace{E_3 [E_{i'}]}_{\text{Funktional}} \}^2 \qquad \text{OK!}$$

Jetzt können wir direkt das Pfadintegral niederschreiben. Mit $E_i \to \pi_i$:

$$\int\limits_{\text{periodisch}} \mathcal{D}A_i \int \mathcal{D}\pi_i \, \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[i\pi_i \frac{\partial A_i}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \frac{1}{2}E_3^2[\pi_i] \right]\right\}\Bigg|_{\substack{A_3 \equiv 0 \\ \partial_3 E_3 + \partial_i \pi_i \equiv 0}}$$

Wir werden aber noch einige weitere formale Umschreibungen durchführen, um das Ergebnis in eine schönere Form zu bringen.

1. $$1 \equiv \int \mathcal{D}\pi_3 \, \delta(\pi_3 - E_3)\Big|_{\partial_i\pi_i + \partial_3 E_3 = 0}$$

$$= \int \mathcal{D}\pi_3 \, \delta(\partial_i\pi_i) \det\left[\frac{\partial(\partial_i\pi_i)}{\partial \pi_3}\right]\Bigg|_{\pi_3 - E_3 = 0}$$

$\delta(x) = A\,\delta(Ax)$
$= \delta(Ax)\,\frac{d[Ax]}{dx}$

$$\Rightarrow \int\limits_{\text{periodisch}} \mathcal{D}A_i \int \mathcal{D}\pi_1\mathcal{D}\pi_2\mathcal{D}\pi_3 \, \delta(\partial_i\pi_i) \det[\partial_3] \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[i\pi_i \frac{\partial A_i}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}\right]\right\}_{A_3 \equiv 0}$$

2. ein neues A_0-Feld!

$$\delta(\partial_i\pi_i) \equiv \int \mathcal{D}A_0 \, \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \; iA_0\,\partial_i\pi_i\right\}$$

$$= \int \mathcal{D}A_0 \, \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[-i\partial_i A_0 \, \pi_i\right]\right\}.$$

3. $$1 \equiv \int \mathcal{D}A_3 \, \delta(A_3).$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\text{periodisch}} \mathcal{D}A_1\mathcal{D}A_2\mathcal{D}A_3 \int \mathcal{D}A_0 \int \mathcal{D}\pi_1\mathcal{D}\pi_2\mathcal{D}\pi_3 \;\; \delta(A_3) \det[\partial_3] \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[i\pi_i F_{0i} + \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}\right]\right\}.$$

4. Letztendlich können die gaußischen Integrale durchgeführt werden:

$$\int \mathcal{D}\pi \, e^{-\frac{1}{2}\pi^2 - i\pi F} = \int \mathcal{D}\pi \, e^{-\frac{1}{2}\left[(\pi + iF)^2 + F^2\right]} = C \, e^{-\frac{1}{2}F^2} .$$

Also bekommen wir das Pfadintegral

$$\frac{\mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}}\, T\left\{\hat{O}_H(x_1)\cdots\hat{O}_H(x_n)\right\}\right]}{\mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}}\right]} = \frac{\left\langle O_H(x_1)\cdots O_H(x_n)\right\rangle}{\langle 1\rangle}, \quad \text{wo}$$

$$\langle\ldots\rangle = \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}A_1\mathcal{D}A_2\mathcal{D}A_3 \int \mathcal{D}A_0 \;\; \delta(A_3)\,\det\left[\partial_3\right]\,\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x}\; \mathcal{L}_E\right\}(\ldots),$$

$$\mathcal{L}_E \equiv \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad !$$

Also, wie für Skalarfelder, ein einfaches positives Argument innerhalb der Exponentialfunktion!

Es gibt allerdings auch einen Koeffizienten, mit Eichung $[\delta(A_3)]$ und Determinante. Im nächsten Kapitel werden wir diesen noch in eine Form umschreiben, die unabhängig von unserer Eichwahl $[G(x) \equiv A_3(x)]$ ist, und damit verallgemeinert werden kann.

—— ∘ ——