5. Eichfelder

Nach Spin-0 und Spin-$\frac{1}{2}$ Feldern betrachten wir jetzt Spin-1 Felder, "Vektorfelder". Die Vektorfelder scheinen in der Natur fast immer auch "Eichfelder" zu sein. In Lorentz-Transformationen:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad ; \quad A^\mu(x) \to A'^\mu(x') \equiv \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) , \quad \Lambda \in L_+^\uparrow .$$

5.1 Eichinvarianz und die klassische Lagrange-Dichte

Einige mögliche quadratische Terme, ohne Eichinvarianz:

$$\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu , \quad \partial^\mu A_\mu \partial^\nu A_\nu , \quad m^2 A^\mu A_\mu .$$

Zum Beispiel,

$$\mathcal{L}_M \equiv \frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu$$

Scheint in Ordnung zu sein: 4 unabhängige Skalarfelder! Allerdings ist

$$A^\nu A_\nu = A_0 A_0 - \sum_i A_i A_i$$

$\Rightarrow$ 1 bzw. 3 davon geben einen negativen Beitrag zur Hamilton-Dichte. ↯

Warum führen wir jetzt Eichinvarianz ein? Es gibt keine eindeutige Antwort! Die Sache wird um so komischer aussehen, wenn wir die Theorie später quantisieren: die Eichinvarianz wird wieder (wenn auch nur sehr vorsichtig) gebrochen.

Dennoch bringt Eichinvarianz viele gute Dinge mit sich:

* Es ist möglich zu beweisen, daß solche Theorien (perturbativ) renormierbar sind.
* Sie begrenzt die Anzahl möglicher Parameter, so daß solche Theorien recht prädiktiv sind.
* Sie begrenzt auch die Anzahl relevanter Observablen: nur eichinvariante Größen werden als physikalisch betrachtet.
* Klassische Eichtheorien besitzen elegante differentialgeometrische / topologische Eigenschaften.
* Pfadintegralquantisierte Eichfeldtheorie in der Gitter-Regularisierung stellt eine besonders schöne und auch mathematisch rigoros definierte Quantenfeldtheorie dar.
* Eichtheorien sind die einzigen bekannten Theorien mit der Eigenschaft der asymptotischen Freiheit.

Was ist Eichinvarianz?

* Materiefelder : $\phi \in \mathbb{C}^{N_c}$ [Skalarfeld ; N_c = "die Anzahl von Farben"]

  $\psi_\alpha \in \mathbb{G}^{N_c}$ [Fermion ; $\alpha = 1,\ldots,4$ numeriert Dirac-Komponente]

  Grassmann-Algebra

* Wechselwirkungen werden durch Eichfelder vermittelt.

* Das Eichprinzip verlangt, daß $\mathcal{L}_M$ invariant in einer lokalen Transformation bleibt,

$$\phi(x) \to \phi'(x) \equiv U(x)\,\phi(x)$$

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x) \equiv U(x)\,\psi_\alpha(x)\,,$$

wo $U(x)$ ein Element der Eichgruppe ist. [Yang, Mills 1954]

* Gruppentheorie : [z.B. www.physik.uni-bielefeld.de/~laine/symmetrien/cover.html]

  - endlich dimensionale Darstellungen können als unitäre Darstellungen gesehen werden.

    kompakter Gruppen

  - $A \in U(N_c) \Rightarrow A = e^{i\alpha}\cdot B\,,\; B \in SU(N_c)\,,\; e^{i\alpha} \in U(1)$.

  - betrachten wir also die Eichgruppe $SU(N_c)$; die Eichgruppe $U(1)$ kann in vieler Hinsicht sogar als deren Grenzfall gesehen werden (vgl. später).

* Ohne Ableitungen gibt es zwei Arten von invarianten Termen:

$$\text{(i)}\quad \phi^\dagger(x)\,\phi(x) \to \phi^\dagger(x)\underbrace{U^\dagger(x)\,U(x)}_{\mathbb{1}}\phi(x) = \phi^\dagger(x)\,\phi(x)$$

$$\text{(ii)}\quad \varepsilon_{\alpha\ldots\gamma}\,\phi_\alpha\cdots\phi_\gamma \to \varepsilon_{\alpha\ldots\gamma}\,U_{\alpha\alpha'}\cdots U_{\gamma\gamma'}\,\phi_{\alpha'}\cdots\phi_{\gamma'} \overset{!}{=} \det(U)\cdot\varepsilon_{\alpha'\ldots\gamma'}\,\phi_{\alpha'}\cdots\phi_{\gamma'}\,.$$

antisymmetrisch mit N_c Indizes

Die zweite Art funktioniert allerdings nicht mit $U(1)$!

* Mit Ableitungen:

$$\partial_\mu\phi(x) \to \partial_\mu\{U(x)\,\phi(x)\} = \{\partial_\mu U(x)\}\,\phi(x) + U(x)\,\partial_\mu\phi(x)$$

$$= U(x)\,\{U^\dagger(x)\,\partial_\mu U(x)\,\phi(x) + \partial_\mu\phi(x)\}$$

$\Rightarrow\; \partial^\mu\phi^\dagger\,\partial_\mu\phi$ ist nicht invariant.

Um Invarianz wiederherzustellen, führen wir eine kovariante Ableitung ein:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig A_\mu(x)$$

$g \equiv$ Kopplungskonstante

$A_\mu(x) \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a(x) T^a$; $A_\mu^a(x) \in \mathbb{R}$; $T^a = N_c \times N_c$ - Matrix = "Generator" der $SU(N_c)$.

$(T^a)^+ = T^a$; $Sp[T^a] = 0$; $Sp[T^a T^b] \equiv \frac{\delta^{ab}}{2}$.

Normierung

$[T^a, T^b] = \sum_c i f^{abc} T^c$

"Strukturkonstanten" der "Lie-Algebra"

Im Folgenden benutzen wir die Einstein-Konvention auch für die Indizes a,b,c.

Behauptung: Die Transformation

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) \equiv U(x) A_\mu(x) U^+(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^+(x)$$

führt zur Eichinvarianz.

Beweis:

(a) Die Transformation ist wohldefiniert:

$*$ $[A'_\mu]^+ = U A_\mu U^+ - \frac{i}{g} \partial_\mu U U^+$; $UU^+ = \mathbb{1} \Rightarrow \partial_\mu U U^+ + U \partial_\mu U^+ = 0$

$= A'_\mu$

$*$ $Sp[A'_\mu] = Sp[U A_\mu U^+] - \frac{i}{g} Sp[\partial_\mu U U^+]$; $*$ $Sp[U A_\mu U^+] = Sp[U^+ U A_\mu] = 0$

$*$ $Sp[\partial_\mu U U^+] = 0$

(Aufgabe 10.1)

$= 0$.

(b) $D'_\mu \phi' = (\partial_\mu - ig U A_\mu U^+ + U \partial_\mu U^+) \{U\phi\}$

$= U(\partial_\mu - ig A_\mu)\phi + \underbrace{(\partial_\mu U U^+ + U \partial_\mu U^+)}_{=0}\{U\phi\} = U D_\mu \phi$!

$\Leftrightarrow$ $D'_\mu(x) U(x) = U(x) D_\mu(x)$ $\Leftrightarrow$ $D'_\mu = U D_\mu U^+$.

Damit sind Konstruktionen wie

$$\mathcal{L}_M = (D^\mu \phi)^+ (D_\mu \phi) \quad \text{und}$$

$$\mathcal{L}_M = \bar{\Psi}_\alpha \{ i [\gamma^\mu]_{\alpha\beta} D_\mu - m \delta_{\alpha\beta} \} \Psi_\beta$$

tatsächlich eichinvariant!

Letztendlich brauchen wir noch einen "kinetischen Term" für die Eichfelder.
Wir definieren

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}\left[D_\mu, D_\nu\right] \equiv F^a_{\mu\nu} T^a \, .$$

In Komponentenform:

$$F^a_{\mu\nu} = 2\,\mathrm{Sp}\left\{T^a F_{\mu\nu}\right\}$$

$$= \frac{2i}{g}\mathrm{Sp}\Big\{T^a\Big(\underbrace{[\partial_\mu,\partial_\nu]}_{=0} - ig\underbrace{[\partial_\mu, A_\nu]}_{=\partial_\mu A^b_\nu T^b} - ig\underbrace{[A_\mu,\partial_\nu]}_{=-\partial_\nu A^b_\mu T^b} - g^2\underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{=A^b_\mu A^c_\nu\, i f^{bcd} T^d}\Big)\Big\}$$

$$= \frac{2i}{g}\left\{-\frac{ig}{2}\partial_\mu A^a_\nu + \frac{ig}{2}\partial_\nu A^a_\mu - \frac{ig^2}{2} A^b_\mu A^c_\nu f^{bca}\right\} \qquad ; \; f^{bca} = f^{abc}$$

(Aufgabe 10.1: f^{abc} sind antisymmetrisch!)

$$= \underline{\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu}$$

In Eichtransformationen:

$$F'_{\mu\nu} = \frac{i}{g}\left[D'_\mu, D'_\nu\right] = \frac{i}{g}\left[U D_\mu U^+, U D_\nu U^+\right] = U F_{\mu\nu} U^+$$

$\Rightarrow \; \mathrm{Sp}\left[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{2} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$ ist sowohl eichinvariant als auch Lorentz-invariant.

"Kanonische Normierung" bestimmt (vgl. später) den Koeffizienten.
Damit stehen uns jetzt komplette Theorien zur Verfügung:

* $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \bar{\Psi}_\alpha\left[i\gamma^\mu D_\mu - m\right]_{\alpha\beta}\Psi_\beta$ mit $N_c = 3$: $\underline{\underline{\text{QCD}}}$!

* $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + (D^\mu\phi)^+(D_\mu\phi) - V(\phi^+\phi)$ mit $N_c = 2$: $\underline{\underline{\text{Schwache Wechselwirkungen und das Higgs-Boson !}}}$

Und mit $N_c \to 1$, $N_c^2 - 1 \overset{!}{\to} 1$, $T^a \to 1$, $f^{abc} \to 0$, $A^a_\mu \to A_\mu$,
$F^a_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $g \to e$ = elektromagnetische Kopplungskonstante:

* $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}_\alpha\left[i\gamma^\mu D_\mu - m\right]_{\alpha\beta}\Psi_\beta$: $\underline{\underline{\text{QED}}}$!

——— o ———