4.3. Euklidische Dirac-Felder (in d Dimensionen)

Seiten 57-60:

$$\mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}(\hat{p},\hat{x})}\, T\{\hat{x}_H(\tau_1)\dots\hat{p}_H(\tau_n)\}\right] = \int\limits_{\substack{c(\beta)=-c(0)\\ c^*(\beta)=-c^*(0)}} \mathcal{D}c^*\mathcal{D}c \;\; c(\tau_1)\dots ic^*(\tau_n)\, e^{-\int_0^\beta d\tau\left\{c^*(\tau)\frac{dc(\tau)}{d\tau}+H(ic^*(\tau),c(\tau))\right\}},$$

wobei

$$\hat{x}\equiv\hat{a} \;\hat{=}\; \hat{\psi}$$
$$\hat{p}\equiv i\hat{a}^+ \;\hat{=}\; \hat{\pi}=i\hat{\psi}^+ \quad ; \quad \{\hat{x},\hat{p}\}=i \;;\quad \{c,c^*\}=0=\{c,c\}=\{c^*,c^*\}.$$

Wir verallgemeinern jetzt dieses Ergebnis zur Quantenfeldtheorie.

Seite 55:

$$\hat{H}=\int d^3\vec{x}\;\hat{\bar{\psi}}\left[-i\gamma^i\partial_i+m\right]\hat{\psi} \quad ; \quad \hat{\bar{\psi}}=\hat{\psi}^+\gamma^0$$

Wir können also überall $\hat{\psi}\to\psi\equiv c$, $\hat{\psi}^+\to\psi^+\equiv c^*$ ersetzen. Es ist weiterhin Konvention, $\bar{\psi}\equiv\psi^+\gamma^0$ statt ψ^+ als Integrationsvariable zu nehmen. Damit bekommen wir:

$$\mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}}\,T\{\hat{\psi}_H(x_1)\dots\hat{\bar{\psi}}_H(x_n)\}\right]$$
$$=\int\limits_{\substack{\psi(\beta,\vec{x})=-\psi(0,\vec{x})\\ \bar{\psi}(\beta,\vec{x})=-\bar{\psi}(0,\vec{x})}}\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi \quad \psi(x_1)\cdots\bar{\psi}(x_n)\, e^{-\int_0^\beta d\tau\int d^3\vec{x}\left\{\bar{\psi}\gamma^0\partial_\tau\psi+\bar{\psi}\left[-i\gamma^i\partial_i+m\right]\psi\right\}}.$$

Zwei Schreibweisen:

(1) Definieren wir die euklidischen Dirac-Matrizen als

$$\gamma_0^E\equiv\gamma^0,\quad \gamma_i^E\equiv -i\gamma^i \qquad \left(\Rightarrow \{\gamma_\mu^E,\gamma_\nu^E\}=2\delta_{\mu\nu}\right)$$

wird der Exponent ganz einfach

$$S_E=\int_0^\beta d\tau\, d^3\vec{x}\;\mathcal{L}_E,\qquad \mathcal{L}_E\equiv\bar{\psi}\left[\gamma_\mu^E\partial_\mu^E+m\right]\psi.$$

(2) Durch Wick-Drehung, $\tau=it$, $\partial_\tau=-i\partial_t$, $d\tau=i\,dt$, bekommen wir auf der anderen Seite (wie schon auf Seite 32 für Skalarfelder)

$$e^{i\int dt\int d^3\vec{x}\;\mathcal{L}_M},\qquad \mathcal{L}_M=\bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right]\psi.$$

Störungstheorie

Wie für Bosonen, brauchen wir ein Wick-Theorem, um alles durch freie Propagatoren auszudrücken, sowie eben den freien Propagator.

Betrachten wir das Grassmann-Integral

$$I_{k\ldots l;m\ldots n} \equiv \int \left\{ \prod_i dc_i^* dc_i \right\} c_k \cdots c_l c_m^* \cdots c_n^* \exp\left\{ -c_p^* A_{pq} c_q \right\} \quad ; \quad A_{pq} \in \mathbb{C} .$$

Wir definieren Grassmannsche Ableitungen als:

$$\left\{ \frac{d}{dc_i}, c_j \right\} \equiv \delta_{ij} \quad , \left\{ \frac{d}{dc_i^*}, c_j^* \right\} \equiv \delta_{ij} \quad ; \quad \left\{ \frac{d}{dc_i}, \frac{d}{dc_j} \right\} \equiv \left\{ \frac{d}{dc_i^*}, \frac{d}{dc_j^*} \right\} \equiv 0 .$$

Weiterhin führen wir Grassmannsche Quellen j, j^* ein:

$$Z[j,j^*] \equiv \int \left\{ \prod_i dc_i^* dc_i \right\} \exp\left\{ -c_p^* A_{pq} c_q + c_p^* j_p + j_q^* c_q \right\} .$$

Dann gilt:

$$I_{k\ldots l;m\ldots n} = \left(\frac{d}{dj_k^*} \right) \cdots \left(\frac{d}{dj_l^*} \right) \left(\frac{-d}{dj_m} \right) \cdots \left(-\frac{d}{dj_n} \right) Z[j,j^*] \Big|_{j=j^*=0} .$$

$Z[j,j^*]$ kann durch eine Substitution der Integrationsvariablen bestimmt werden:

$$c \to c + A^{-1} j$$
$$c^+ \to c^+ + j^+ A^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad -c^+ A c + c^+ j + j^+ c \to -c^+ A c - \cancel{c^+ j} - \cancel{j^+ c} - j^+ A^{-1} j + \cancel{c^+ j} + j^+ A^{-1} j + \cancel{j^+ c} + j^+ A^{-1} j$$

$$= -c^+ A c + j^+ A^{-1} j$$

$$\Rightarrow \quad Z[j,j^*] = Z[0,0] \cdot \exp\left\{ j_p^* A_{pq}^{-1} j_q \right\}$$

(Aufgabe 8.4)

Es folgt:

(i) $\langle c_k c_l \rangle = \langle c_k^* c_l^* \rangle = 0$

$$-\langle c_l^* c_k \rangle = \underline{\underline{\langle c_k c_l^* \rangle}} \equiv \frac{I_{k;l}}{I_;} = \frac{d}{dj_k^*} \frac{-d}{dj_l} e^{j_p^* A_{pq}^{-1} j_q} \Big|_{j=j^*=0} = + \underline{\underline{A_{kl}^{-1}}} .$$

(ii) $\langle c_k c_l c_m^* c_n^* \rangle = + c_k c_l c_m^* c_n^* - c_k c_l c_m^* c_n^*$

wobei $c_l c_m^* \equiv \langle c_l c_m^* \rangle$. [Aufgabe 9.1]

Also das alte Wick-Theorem, nur mit $(-1)^n$ dazu!

(iii) Verallgemeinerung von Aufgabe 8.3:

$$\underline{\underline{Z[0,0] = \det A}} .$$

Als eine Anwendung bestimmen wir den Schwinger-Propagator für das Dirac-Feld.

Konvention (wie schon auf Seite 33): alle Indizes unten impliziert $\gamma_\mu \equiv \gamma_\mu^E$, $\partial_\mu \equiv \partial_\mu^E$.

Schreiben wir $S_E = \int d\tau \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L}_E$ in Fourier-Darstellung (vgl. Seite 35-36):

$$\psi(x) = \frac{1}{V}\sum_P e^{iP\cdot x}\,\tilde{\psi}(P)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{V}\cdot\sum_Q e^{-iQ\cdot x}\,\tilde{\bar{\psi}}(Q)$$

$$\Rightarrow \quad S_E = \frac{1}{V}\sum_P \frac{1}{V}\sum_Q V\,\delta^{(4)}_{P,Q}\,\tilde{\bar{\psi}}(Q)\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\right]\tilde{\psi}(P)$$

$$= \frac{1}{V}\sum_P \tilde{\bar{\psi}}(P)\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\right]\tilde{\psi}(P)$$

Wir bekommen also

$$\langle \tilde{\psi}_\alpha(P)\,\tilde{\bar{\psi}}_\beta(Q)\rangle = V\delta^{(4)}_{P-Q,0}\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]^{-1}_{\alpha\beta} .$$

Behauptung: $\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]^{-1} = \dfrac{-i\gamma_\nu P_\nu + m\mathbb{1}}{P^2+m^2}$.

Beweis:

$$\left[-i\gamma_\nu P_\nu + m\right]\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\right] = \gamma_\nu\gamma_\mu P_\mu P_\nu + m^2$$

$$= \frac{1}{2}P_\mu P_\nu\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} + m^2 = P_\mu P_\mu + m^2 \qquad \square .$$

Das heißt, für $V\to\infty$ (vgl. Seiten 35-36):

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_\alpha(P)\,\tilde{\bar{\psi}}_\beta(Q)\rangle &= \delta(P-Q)\,\frac{\left[-i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]_{\alpha\beta}}{P^2+m^2} \\ \langle \psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\rangle &= \int\frac{d^dP}{(2\pi)^d}\,e^{iP\cdot(x-y)}\,\frac{\left[-i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]_{\alpha\beta}}{P^2+m^2} \end{aligned}}$$

Es wäre eine schöne Übung zu verifizieren, daß eine direkte Berechnung von

$$\langle 0|T\{\hat{\psi}_\alpha(x)\,\hat{\bar{\psi}}_\beta(y)\}|0\rangle ,$$

wie auf Seite 15 für $\langle 0|T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\}|0\rangle$, dasselbe Ergebnis liefert!

— o —

Eigenschaften der Dirac-Matrizen in dimensionaler Regularisierung

Minkowski: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$; $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

Euklidisch: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1}$; $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$; $\gamma_0 \equiv \gamma_0^E \equiv \gamma^0$, $\gamma_i \equiv \gamma_i^E \equiv -i\gamma^i$.

Im Folgenden betrachten wir euklidische Dirac-Matrizen.

(1) $\mathrm{Sp}[\mathbb{1}] \equiv N$.

(Normalerweise $N \equiv 4$, manchmal aber $N = 2^{d/2}$ oder vielleicht auch $N = d$).

(2) $\mu \neq \nu \Rightarrow \gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu \quad |\cdot\gamma_\mu \quad \Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu] = \mathrm{Sp}[\gamma_\nu] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\nu]$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\nu] = 0$.

(3) $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1}$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = N \cdot \delta_{\mu\nu}$.

(4) $\mathrm{Sp}[\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = ?$

(a) Zwei Indizes (z.B. α,β) gleich $\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = \mathrm{Sp}[\gamma_\delta] = 0$

(b) alle Indizes ungleich $\Rightarrow$

$\mathrm{Sp}[\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = \mathrm{Sp}[\gamma_\varepsilon^2\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\varepsilon\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\varepsilon] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\varepsilon^2\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta]$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho] = 0$.

(5) $\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\rho] + 2\delta_{\rho\sigma}\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu]$

$\hookrightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\rho] - 2\delta_{\nu\sigma}\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\rho]$

$\hookrightarrow -\mathrm{Sp}[\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho] + 2\delta_{\mu\sigma}\mathrm{Sp}[\gamma_\nu\gamma_\rho]$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] = N(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})$

usw.

(6) Es gibt auch Identitäten ohne Spur, z.B.

$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu = -\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha + 2\delta_{\alpha\nu}\gamma_\mu$

$\hookrightarrow \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\alpha - 2\delta_{\mu\nu}\gamma_\alpha$

$\hookrightarrow -\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu + 2\delta_{\mu\alpha}\gamma_\nu$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu) = \gamma_\mu\delta_{\alpha\nu} + \gamma_\nu\delta_{\alpha\mu} - \delta_{\mu\nu}\gamma_\alpha$

(7) Es wird auch $\gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ definiert, mit $\gamma_5^2 = 1$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$. $\Rightarrow$ Aufgabe 9.2

Aber wie funktioniert γ_5 in d Dimensionen? Es gibt keine eindeutige Antwort! Die 't Hooft-Veltman-Konvention:

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \mu \leq 3$$
$$[\gamma_5, \gamma_\mu] = 0, \quad \mu > 3.$$