4.2 Grassmannsche Pfadintegrale

Wie schon mit Bosonen, lohnt es sich reichlich, von der "kanonischen" Quantisierung zum Pfadintegralformalismus überzugehen [Berezin 1966].

Als Anfangspunkt nehmen wir wieder Zeitgeordnete Green-Funktionen, nach der Wick-Drehung:

$$G_\beta^{(n)}(x_1,\dots,x_m;x_{m+1},\dots,x_n) = \frac{S_p\left[e^{-\beta\hat{H}}\, T\{\hat{\Psi}_H(x_1)\dots\hat{\Psi}_H(x_m)\hat{\bar{\Psi}}_H(x_{m+1})\dots\hat{\bar{\Psi}}_H(x_n)\}\right]}{S_p\left[e^{-\beta\hat{H}}\right]}\,, \quad \beta \geq \tilde{x}_1^0,\dots,\tilde{x}_n^0 \geq 0\,,$$

$$G_E^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{\beta\to\infty} G_B^{(n)}(x_1,\dots,x_n)\,. \qquad \text{(Seite 29)}$$

Die Definition der Zeitordnung für Fermionen:

$$T\{\hat{\Psi}_H(\tilde{x})\,\hat{\Psi}_H(\tilde{y})\} \equiv \Theta(\tilde{x}^0-\tilde{y}^0)\,\hat{\Psi}_H(\tilde{x})\,\hat{\Psi}_H(\tilde{y}) - \Theta(\tilde{y}^0-\tilde{x}^0)\,\hat{\Psi}_H(\tilde{y})\,\hat{\Psi}_H(\tilde{x})\,.$$

Wie für Bosonen, finden wir die Antwort am leichtesten, indem wir Quantenmechanik statt Quantenfeldtheorie betrachten.

Es ist weiterhin ausreichend, sich auf den "Teilchen-Teil" zu beschränken:

$$\hat{\Psi} \sim \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}\,u\,e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^+ v\, e^{ip\cdot x}\right] \xrightarrow[\substack{u\to\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}}\\ E_{\vec{p}}\to\omega}]{\substack{\text{H-Bild}\to\text{S-Bild}\\ \text{QFT}\to\text{QM}}} \hat{x} \equiv \hat{a}$$

$$\hat{\Pi} = i\hat{\psi}^+ \sim \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\left[i\hat{a}^+u^+e^{ip\cdot x} + i\hat{b}\,v^+e^{-ip\cdot x}\right] \longrightarrow \hat{p} \equiv i\hat{a}^+$$

$$\hat{H} = \int d^3\vec{p}\, E_{\vec{p}}\left[\hat{a}^+\hat{a} - \hat{b}\hat{b}^+\right] \longrightarrow \hat{H} = \omega(\hat{a}^+\hat{a})$$

Antikommutatoren:

$$\{\hat{a},\hat{a}\} = \{\hat{a}^+,\hat{a}^+\} = 0\,, \quad \{\hat{a},\hat{a}^+\} = \{\hat{a}^+,\hat{a}\} = 1$$

$$\{\hat{x},\hat{p}\} = i$$

$$[\hat{H},\hat{a}] = \omega\left(\hat{a}^+\{\hat{a},\hat{a}\} - \{\hat{a}^+,\hat{a}\}\hat{a}\right) = -\omega\hat{a}$$

$$[\hat{H},\hat{a}^+] = \omega\left(\hat{a}^+\{\hat{a},\hat{a}^+\} - \{\hat{a}^+,\hat{a}^+\}\hat{a}\right) = +\omega\hat{a}^+$$

Das Vakuum $|0\rangle$:

$$\hat{a}|0\rangle \equiv 0$$
$$\hat{a}^+|0\rangle \equiv |1\rangle$$

Es gibt keine anderen Zustände:

$$\hat{a}^+|1\rangle = \hat{a}^+\hat{a}^+|0\rangle = 0$$
$$\hat{a}\,|1\rangle = \hat{a}\hat{a}^+|0\rangle = |0\rangle\,.$$

Es ist relativ klar, daß wir etwas Exotisches brauchen, um die Minus-Zeichen in Vertauschungen der Fermionen klassisch (ohne Operatoren!) zu beschreiben. Das relevante mathematische Hilfsmittel: Grassmann – Variablen.

Die Axiome:

* c, c^* werden als unabhängig voneinander behandelt, wie x, p
* $\int dc = \int dc^* \equiv 0$.
* $\int dc\, c = \int dc^*\, c^* \equiv 1$.
* $c^2 = (c^*)^2 = 0$; $\quad cc^* = -c^*c$; $\quad \{c, dc\} = \{c, dc^*\} = \{c^*, dc\} = \{c^*, dc^*\} = 0$.
* gibt es mehrere Variablen (c_i), antikommutieren sie auch miteinander.
* Integrationsmaß: $\int dc^*\, dc$
* c, c^* müßen auch mit $\hat{a}, \hat{a}^+$ antikommutieren, so daß Produkte wie $c\hat{a}^+$ reguläre bosonische Operatoren sind.

Mit diesen neuen klassischen aber antikommutierenden $(\{c, c^*\} = 0 \;!)$ Koordinaten sowie den antikommutierenden Operatoren $\hat{a}, \hat{a}^+$ $(\{\hat{a}, \hat{a}^+\} = 1 \;!)$ definieren wir zwei nützliche **Zustände:**

$$|c\rangle \equiv e^{-c\hat{a}^+}|0\rangle = (1 - c\hat{a}^+)|0\rangle = |0\rangle - c|1\rangle \;;$$

$$\hat{a}|c\rangle = c|0\rangle = c|c\rangle \tag{1}$$

$\Rightarrow$ $|c\rangle$ ist ein Eigenzustand von $\hat{a}$ bzw. $\hat{x}$!

$$\langle c| \equiv \langle 0|e^{-\hat{a}c^*} = \langle 0|(1 - \hat{a}c^*) = \langle 0| - \langle 1|c^* \;;$$

$$\langle c|\hat{a}^+ = \langle 0|c^* = \langle c|c^* \tag{2}$$

$\Rightarrow$ $\langle c|$ ist ein Eigenzustand (von rechts) von $\hat{a}^+$ bzw. $\hat{p}$!

$$\langle c'|c\rangle = \langle 0|(1 - \hat{a}c'^*)(1 - c\hat{a}^+)|0\rangle = 1 + \langle 0|\hat{a}\, c'^* c\, \hat{a}^+|0\rangle$$

$$= 1 + c'^* c = e^{c'^* c} \tag{3}$$

Wir bemerken jetzt, daß:

$$* \int dc^* dc \; e^{-c^*c} \; |c\rangle\langle c| = \int dc^* dc \; (1-c^*c)(1-c\hat{a}^+)\,|0\rangle\langle 0|\,(1-\hat{a}c^*)$$
$$= |0\rangle\langle 0| + \int dc^* dc \; c\hat{a}^+ |0\rangle\langle 0| \hat{a} c^*$$
$$= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \mathbb{1}$$

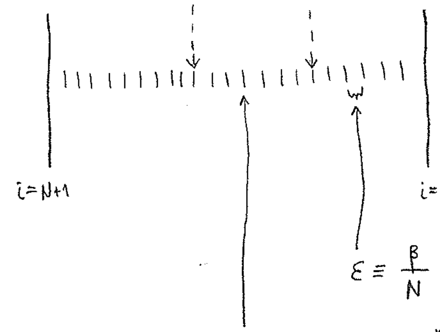
$$* \int dc^* dc \; e^{-c^*c} \langle -c|\hat{A}|c\rangle = \int dc^* dc \; (1-c^*c)\langle 0|(1+\hat{a}c^*)\hat{A}(1-c\hat{a}^+)|0\rangle$$

bosonisch

$$= \langle 0|\hat{A}|0\rangle - \int dc^* dc \; \langle 0|\hat{a}c^*\hat{A}c\hat{a}^+|0\rangle$$
$$= \langle 0|\hat{A}|0\rangle - \int dc^* dc \; c^*c \; \langle 1|\hat{A}|1\rangle$$
$$= \langle 0|\hat{A}|0\rangle + \langle 1|\hat{A}|1\rangle = Sp[\hat{A}] \; .$$

Mit diesen Schreibweisen können wir dem bosonischen Fall (Seite 30) folgen:

$$Sp\left[e^{-\beta\hat{H}}\, T\{\hat{x}_H(\tau_1)\ldots \hat{p}_H(\tau_n)\}\right] = \int dc_1^* dc_1 \, e^{-c_1^*c_1} \langle -c_1|\, e^{-(\beta-\tau_i)\hat{H}}\, \hat{x} \;\ldots\ldots\; \hat{p}\, e^{-\tau_n\hat{H}}\, |c_1\rangle \cdot (-1)^m$$



$$\mathbb{1} = \int dc_i^* dc_i \, e^{-c_i^* c_i}\, |c_i\rangle\langle c_i|$$

Wir schreiben wieder

$$e^{-(\beta-\tau_i)\hat{H}} = \left[e^{-\varepsilon\hat{H}}\right]^{\frac{\beta-\tau_i}{\varepsilon}} = e^{-\varepsilon\hat{H}}\, e^{-\varepsilon\hat{H}} \ldots e^{-\varepsilon\hat{H}} \qquad \text{usw.}$$

Falls $\hat{x}$ auf i sitzt, setzen wir $\mathbb{1}$ auf dessen rechte Seite,
so daß $\hat{x}|c_i\rangle = c_i|c_i\rangle$; falls $\hat{p}$, auf die linke Seite, so daß $\langle c_i|\hat{p}_i = \langle c_i|c_i^*$.

Gebraucht wird also:

$$e^{-c^*_{i+1}c_{i+1}} \; |c_{i+1}\rangle\langle c_{i+1}| \; (\hat{p}) \; e^{-\varepsilon \hat{H}(\hat{p},\hat{x})} \; (\hat{x}) \; |c_i\rangle$$

je nach dem

$$= e^{-c^*_{i+1}c_{i+1}} \; |c_{i+1}\rangle\langle c_{i+1}|c_i\rangle \; (ic^*_{i+1}) \; e^{-\varepsilon H(ic^*_{i+1}, c_i)} \; (c_i)$$

(3) auf Seite 58

$$\stackrel{\downarrow}{=} |c_{i+1}\rangle \; \exp\left[-\varepsilon\left\{c^*_{i+1}\frac{c_{i+1}-c_i}{\varepsilon} + H(ic^*_{i+1}, c_i)\right\}\right](ic^*_{i+1})(c_i)$$

Und dann dasselbe mit $i \to i+1$.

Das letzte Intervall verlangt allerdings genauere Betrachtung:

$$\int dc_1^* dc_1 \, e^{-c_1^* c_1} \langle -c_1| \, e^{-\varepsilon \hat{H}(\hat{p},\hat{x})} \int dc_N^* dc_N \, |c_N\rangle$$

$$= \int dc_1^* dc_1 \, dc_N^* dc_N \; \exp\left[-c_1^* c_1 - c_1^* c_N - \varepsilon H(-ic_1^*, c_N)\right]$$

$$= \int dc_1^* dc_1 \, dc_N^* dc_N \; \exp\left[-\varepsilon\left\{c_1^* \frac{c_1+c_N}{\varepsilon} + H(-ic_1^*, c_N)\right\}\right]$$

$$= \int dc_1^* dc_1 \, dc_N^* dc_N \; \exp\left[-\varepsilon\left\{-c_1^* \frac{-c_1-c_N}{\varepsilon} + H(-ic_1^*, c_N)\right\}\right].$$

Setzen wir auch die "Felder" außerhalb des Exponenten in ihre ursprüngliche Ordnung, kürzt sich $(-1)^m$, und wir bekommen

$$G_\beta^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{\int dc_N^* dc_N \ldots dc_1^* dc_1 \; c(\tau_1)\ldots ic^*(\tau_n)\,\exp[-S_E]}{\int dc_N^* dc_N \ldots dc_1^* dc_1 \,\exp[-S_E]},$$

$$S_E = \varepsilon \sum_{i=1}^{N}\left\{c^*_{i+1}\frac{c_{i+1}-c_i}{\varepsilon} + H(ic^*_{i+1}, c_i)\right\}\Bigg|_{\substack{c_{N+1} \equiv -c_1 \\ c^*_{N+1} \equiv -c_1^*}}$$

$$\equiv \frac{\displaystyle\int_{\substack{c(\beta)=-c(0)\\ c^*(\beta)=-c^*(0)}} \mathcal{D}c^*(\tau)\mathcal{D}c(\tau) \; c(\tau_1)\ldots ic^*(\tau_n)\,\exp\left[-\int_0^\beta d\tau\left\{c^*(\tau)\frac{dc(\tau)}{d\tau} + H(ic^*(\tau), c(\tau))\right\}\right]}{\displaystyle\int_{\substack{c(\beta)=-c(0)\\ c^*(\beta)=-c^*(0)}} \mathcal{D}c^*(\tau)\mathcal{D}c(\tau)\,\exp\left[-\int_0^\beta d\tau\left\{c^*(\tau)\frac{dc(\tau)}{d\tau} + H(ic^*(\tau), c(\tau))\right\}\right]}.$$