3.3. Renormierungsgruppe (RG)

Es gibt viele verschiedene Arten von Renormierungsgruppengleichungen, mit unterschiedlichen Anfangspunkten und Zielen. Zum Beispiel:

* Callan-Symanzik-Gleichungen:

$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\bigg|_{\lambda_R} \tilde{G}^{(n)}_{R,c}(p_1, \dots, p_n) = \dots$$

Enthält nur endliche renormierte Größen $\Rightarrow$ drückt physikalische Parameterabhängigkeiten aus. Callan-Symanzik-Gleichungen können mit jeder Art von Regularisierung hergeleitet werden.

* Wilsonsche Renormierungsgruppe:

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{G}^{(n)}_{R,c}(p_1, \dots, p_n) = \dots$$

Hier ist Λ ein unphysikalischer Infrarotregularisator:
Physik entspricht $\Lambda \to 0$, aber Berechnungen könnten mit $\Lambda \neq 0$ leichter sein. Sehr wichtig in der Theorie der Phasenübergänge in der statistischen Physik.

* Renormierungsgruppe für Minimale Subtraktion:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{G}^{(n)}_{R,c}(p_1, \dots, p_n) = \dots$$

Die allgemeine Philosophie:

* Berechnungen könnten in einem bestimmten Teil der Parameterraumes leichter sein als anderswo.

  Zum Beispiel, Störungstheorie zur 1-Schleifen-Ordnung gibt schon gute Ergebnisse.

* Renormierungsgruppengleichungen sind leichter herzuleiten als die kompletten Green-Funktionen.

  Zum Beispiel, wir könnten die 2-Schleifen-Ordnung erreichen.

* Die Renormierungsgruppengleichungen erlauben uns, die guten Ergebnisse in einem Teil des Parameterraumes anderswo hin zu übertragen.

Als ein Beispiel betrachten wir RG-Gleichungen der dritten Art, für λ_R.
[Wir könnten dies auch für m_R^2, wie auf Seite 47 bestimmt, tun.]
Dafür müßen wir $\tilde{A}^{(4)}_{B,C}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ betrachten. Wir wählen sogar $p_1=p_2=p_3=p_4=0$!

Anfangspunkt: Seite 33 + $\exp(-S_I) = 1 - S_I + \frac{1}{2}S_I^2 + \dots$ (oder Seite 28)

$\boxed{G^{(4)}_{B,C}}$

$\mathcal{O}(\lambda_B^0)$ (S. 27) :  usw. $\Rightarrow$ nicht zusammenhängend

$\mathcal{O}(\lambda_B^1)$ (S. 28) :  usw. $\Rightarrow$ nicht zusammenhängend

 $\Rightarrow$ (i)

$\mathcal{O}(\lambda_B^2)$:  usw. $\Rightarrow$ (ii)

(i) $$\delta(0)\cdot\tilde{G}^{(4)}_{B,C}(0,0,0,0)\Big|_{\lambda_B} = \int_{x_1x_2x_3x_4}\int_w\left(-\frac{\lambda_B}{4!}\right)\langle \phi_B(x_1)\phi_B(x_2)\phi_B(x_3)\phi_B(x_4)\phi_B^4(w)\rangle$$
(Kontraktionen: 4, 3, 2)

$$= -\lambda_B\cdot\int_{x_1x_2x_3x_4}\int_w\int_{p_1p_2p_3p_4}\frac{e^{ip_1\cdot(x_1-w)}}{p_1^2+m_B^2}\cdot\frac{e^{ip_2\cdot(x_2-w)}}{p_2^2+m_B^2}\cdot\frac{e^{ip_3\cdot(x_3-w)}}{p_3^2+m_B^2}\cdot\frac{e^{ip_4\cdot(x_4-w)}}{p_4^2+m_B^2}$$

$$= -\lambda_B\,\delta(0)\left(\frac{1}{m_B^2}\right)^4 \quad\Rightarrow\quad \tilde{A}^{(4)}_{B,C}(0,0,0,0)\Big|_{\lambda_B} = -\lambda_B$$

(ii) $$\delta(0)\,\tilde{G}^{(4)}_{B,C}(0,0,0,0)\Big|_{\lambda_B^2} = \int_{x_1x_2x_3x_4}\int_{w,v}\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_B^2}{(4!)^2}\langle\phi_B(x_1)\phi_B(x_2)\phi_B(x_3)\phi_B(x_4)\phi_B(w)\phi_B(w)\phi_B(w)\phi_B(w)\phi_B(v)\phi_B(v)\phi_B(v)\phi_B(v)\rangle$$
(Kontraktionen: 8; $3\times4\times3\times2$; $4\times6\times3\times2$)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2\cdot3^2\cdot2^2}\cdot 8\cdot4\cdot3\cdot2\cdot(3+6) = \frac{3}{2}$$

$$= +\frac{3}{2}\cdot\lambda_B^2\,\delta(0)\left(\frac{1}{m_B^2}\right)^4\cdot\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\cdot\frac{1}{(p^2+m_B^2)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \tilde{A}^{(4)}_{B,C}(0,0,0,0)\Big|_{\lambda_B^2} = +\frac{3}{2}\lambda_B^2\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\cdot\frac{1}{(p^2+m_B^2)^2}.$$

Seite 47: $$\int\frac{d^{4-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}}\frac{1}{p^2+m^2} = -\frac{\mu^{-2\varepsilon}m^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\ln\frac{\bar{\mu}^2}{m^2}+1+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)$$

$$\Rightarrow \int\frac{d^{4-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}}\frac{1}{(p^2+m^2)^2} = -\frac{d}{dm^2}\int\frac{d^{4-2\varepsilon}p}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}}\cdot\frac{1}{p^2+m^2} = \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}+\ln\frac{\bar{\mu}^2}{m^2}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)$$

Erkennt man weiterhin, daß $Z_\phi = 1 + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$ [Aufgabe 7.3], bekommt man

$$- \tilde{A}^{(4)}_{R,c}(0,0,0,0) = \lambda_R + \lambda_R \,\delta Z_\lambda - \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2 \mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{m_R^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\lambda_R^3).$$

Wir nennen diese Kombination λ_{phys}. Es muß gelten: $\delta Z_\lambda = \frac{3}{2} \frac{\lambda_R \mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$.

Jetzt leiten wir, auf zwei verschiedene Weisen, eine RG-Gleichung her:

(1)

$$\lambda_B = \lambda_R \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R \mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2) \right] \quad \Big| \; \mu \frac{d}{d\mu}$$

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \underbrace{\mu \frac{d}{d\mu} \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{\varepsilon}}_{-2\mu^{-2\varepsilon}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2 \varepsilon} \underbrace{\mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R^2}_{\lambda_R \cdot \mathcal{O}(\lambda_R^2)} + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

$$\Rightarrow \quad \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R = 3 \cdot \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \varepsilon)$$

(2)

$$\lambda_{phys} = \lambda_R - \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2 \mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \ln \frac{\bar{\mu}^2}{m_R^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \varepsilon) \quad \Big| \; \mu \frac{d}{d\mu}$$

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R - 3 \frac{\lambda_R^2 \mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R = 3 \cdot \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \varepsilon)$$

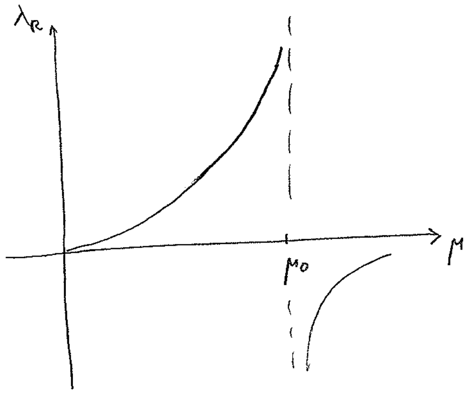
Bemerkungen:

* Die Herleitung der RG-Gleichungen ist relativ einfach, weil man nur die divergenten Teile der Z-Faktoren zu kennen braucht! [Methode (1)]
* Die Gleichungen selbst sind endlich, so daß man am Ende $\varepsilon \to 0$ setzen kann, weil es sich um Gleichungen für renormierte Größen handelt.

Lösung der RG-Gleichung zur Ordnung $\mathcal{O}(\lambda_R^2)$

Aufgabe 7.4 :

$$\lambda_R(\mu) = \frac{(4\pi)^2}{3} \cdot \frac{1}{\ln \frac{\mu_0}{\mu}}$$



Bedeutung:

(a) die Lösung ist zuverlässig nur für $\lambda_R \ll 1$, d.h. $\mu \ll \mu_0$.

(b) dürfte dennoch richtig sein, daß λ_R mit μ wächst. Wir sagen, daß die Wechselwirkungen stärker werden.

(c) wir erfahren von Seite 51, daß die Beziehung zwischen λ_{phys} und λ_R nur kleine Korrekturen hat, falls $\mu^2 \approx m_R^2$! Das heißt, $\lambda_R(\mu) \approx \lambda_{phys}$, falls wir $\mu = m_R$ wählen.

(d) hätten wir externe Impulse gehabt, sollten wir wahrscheinlich $\mu \sim |P_i|$ wählen, um $\lambda_R(\mu) \approx \lambda_{phys}$ zu garantieren. Das heißt, das Wachstum von $\lambda_R(\mu)$ mit μ entspricht dem Wachstum von λ_{phys} mit $|P_i|$!

(e) physikalische Observablen müßen aber endlich bleiben, auch für $|P_i| \to \infty$. Das heißt, $\mu_0 \to \infty$.
Das heißt, λ_R mit fixiertem μ bzw. λ_{phys} mit fixiertem kleinen $|P_i| \longrightarrow 0$.
"Die Theorie ist trivial, keine Wechselwirkungen".