

## 2.3 Schwinger-Dyson-Gleichungen und generierende Funktionale

Als eine Anwendung des Pfadintegralformalismus leiten wir jetzt einige Gleichungen her, die auch außerhalb der Störungstheorie gültig sind.

Ein Funktional hängt von den Werten einer Funktion überall in Raum und Zeit ab:

$$\text{Funktional } \int \uparrow S_E[\phi(x)] = \int d^4x \mathcal{L}_E(\phi(x)) \quad \uparrow \text{Funktion}$$

Eine Funktionalableitung wird definiert als:

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(x) + \epsilon \delta(x-y)] - F[\phi(x)]}{\epsilon}$$

Zum Beispiel:

$$\frac{\delta S_E[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} = \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}_E(\phi(x))}{\partial \phi(x)} \cdot \overset{(\delta)}{\delta}(x-y) = \frac{\partial \mathcal{L}_E(\phi(y))}{\partial \phi(y)}$$

Schwinger-Dyson-Gleichungen drücken die trivialen Tatsachen

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} \frac{d}{dv_k} e^{-S(\vec{v})} = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} \frac{d}{dv_k} \left\{ v_i v_j \dots e^{-S(\vec{v})} \right\} = 0 \quad \text{für } \lim_{|\vec{v}| \rightarrow \infty} S(\vec{v}) = \infty$$

im Falle der Pfadintegrale aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left\{ e^{-S_E[\phi]} \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left\{ \phi(y) \phi(z) \dots e^{-S_E[\phi]} \right\} \end{aligned}$$

Zum Beispiel:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4$$

Aufgabe 6.1

$$\Rightarrow \frac{\delta S_E}{\delta \phi(x)} = [-\partial_\mu^2 + m^2] \phi(x) + \frac{1}{3!} \lambda \phi^3(x)$$

$$\Rightarrow 0 = \int \mathcal{D}\phi \left\{ [-\partial_\mu^2 + m^2] \phi(x) + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x) \right\} e^{-S_E[\phi]}$$

$$\Rightarrow 0 = [-\partial_\mu^2 + m^2] \langle \phi(x) \rangle + \frac{\lambda}{3!} \langle \phi^3(x) \rangle$$

Man findet also die quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung der klassischen Bewegungsgleichung!

Die Schwinger-Dyson-Gleichungen sind besonders wertvoll in Zusammenhang mit generierenden Funktionalen.

wie der Quellenvektor auf Seite 34

$$\text{Sei } Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)}$$

$$\text{Dann ist } \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) e^{-S_E[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)}$$

Das heißt,

$$G_E^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}}{Z[0]}$$

Wir "normieren" meistens  $Z[0] = 1$ .

Dann handelt es sich hier im Wesentlichen um eine Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} J(x_1) \dots J(x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_E^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \end{aligned}$$

Das heißt,  $Z[J]$  "generiert" alle Green-Funktionen.

Betrachten wir jetzt die Schwinger-Dyson-Gleichung für  $Z[J]$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left\{ e^{-S_E[\phi] + \int d^4y J(y)\phi(y)} \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \left\{ -\frac{\delta \mathcal{L}_E}{\delta \phi(x)} + J(x) \right\} e^{-S_E[\phi] + \int d^4y J(y)\phi(y)} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\int \mathcal{D}\phi [\phi(x)]^n e^{-S_E[\phi] + \int d^4y J(y)\phi(y)} = \int \mathcal{D}\phi \left[ \frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^n e^{-S_E[\phi] + \int d^4y J(y)\phi(y)}$$

Wir schreiben  $\frac{\delta \mathcal{L}_E}{\delta \phi(x)} \equiv \mathcal{L}'_E(\phi(x))$ , und bekommen damit

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\phi \left\{ -\mathcal{L}'_E\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + J(x) \right\} e^{-S_E[\phi] + \int d^4y J(y)\phi(y)} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{unabhängig von } \phi!} \\ \Rightarrow 0 &= \underline{\underline{\left[ -\mathcal{L}'_E\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + J(x) \right] Z[J]}} \end{aligned}$$

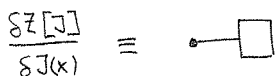
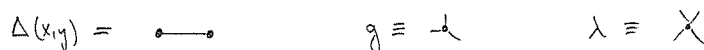
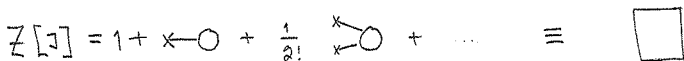
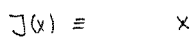
Was bedeutet das? Betrachten wir ein Beispiel.

$$\mathcal{L}_E \equiv \frac{1}{2} \phi \Delta^{-1} \phi + \frac{1}{3!} g \phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \quad ; \quad \Delta^{-1} \equiv -\partial_\mu^2 + m^2$$

[nach partieller Integration]

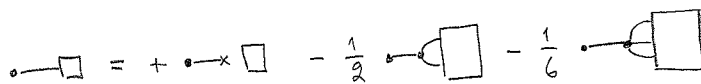
$$\mathcal{L}'_E = \Delta^{-1} \phi + \frac{g}{2!} \phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad \text{[Aufgabe 6.1]}$$

Notation:



Jetzt also:

$$\Delta^{-1} \frac{\delta}{\delta J} Z[J] = \left[ +J - \frac{g}{2} \left( \frac{\delta}{\delta J} \right)^2 - \frac{\lambda}{6} \left( \frac{\delta}{\delta J} \right)^3 \right] Z[J] \quad \left| \quad \times \Delta \text{ von links} \right.$$



Danach können wir "iterieren":

$$\left( \frac{\delta}{\delta J} \right)^2 Z[J] = \frac{\delta}{\delta J} \left\{ + \text{cross-square} - \frac{1}{2} \text{cross-squared-square} - \frac{1}{6} \text{cross-cubed-square} \right\}$$

$$= + \text{line-square} + \text{cross-square} - \frac{1}{2} \text{cross-squared-square} - \frac{1}{6} \text{cross-cubed-square}$$

$$\Rightarrow \text{line-square} = + \text{cross-square} - \frac{1}{2} \left\{ \text{circle-square} + \text{cross-square} - \frac{1}{2} \text{cross-squared-square} - \frac{1}{6} \text{cross-cubed-square} \right\}$$

$$- \frac{1}{6} \left\{ \dots \right\}$$

Falls wir am Ende zur Störungstheorie zurückkehren wollen, können wir die Iteration abbrechen. Zum Beispiel, zur Ordnung  $\mathcal{O}(g^2), \mathcal{O}(\lambda)$ :

$$\frac{\text{line-square}}{\square} = + \text{cross-square} - \frac{1}{2} \text{circle-square} - \frac{1}{2} \text{cross-square} + \mathcal{O}(g^2) + \mathcal{O}(\lambda)$$

Es ist möglich auch andere generierende Funktionale zu definieren.

Ⓐ  $Z[J] \equiv \exp\{W[J]\}$

Eigenschaften von  $W[J]$ :

\* Schreibt man  $W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_{E,c}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n)$   
generiert man die zusammenhängenden Green-Funktionen. [ohne Beweis]

\* Schwinger-Dyson-Gleichung für  $W[J]$ :

$$\mathcal{L}'_E \left( \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} + \delta / \delta J(x) \right) = J(x) \quad [\text{Aufgabe 6.2}]$$

Ⓑ Durch Legendre-Transformation:

$$\varphi(x) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \quad \Gamma[\varphi] \equiv W[J] - \int d^4x \varphi(x) J(x)$$

Eigenschaften von  $\Gamma[\varphi]$ :

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \underbrace{\int \frac{\delta W}{\delta J}}_{\varphi} \frac{\delta J}{\delta \varphi} - J - \int \varphi \frac{\delta J}{\delta \varphi} = -J(x)$$

Am Ende setzen wir  $J(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi} = 0$

$\Rightarrow$  "der Grundzustand ist ein Extremum von  $\Gamma[\varphi]$ "!

\* Schwinger-Dyson-Gleichung für  $\Gamma[\varphi]$ : Aufgabe 6.2.

\* Schreibt man  $\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma_E^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$ ,  
generiert man die 1-Teilchen-nicht-reduzierbaren (1PI) Green-Funktionen.  
[ohne Beweis]

Zusammenhängend:  $G_{E,c}^{(n)}$  =

amputiert:  $A_{E,c}^{(n)}$  = aber ist möglich

1PI:  $\Gamma_E^{(n)}$  =  $\Rightarrow$  keine "einsamen" Linien bzw. Teilchen möglich!

