

2.2 Das Wick-Theorem und der Schwinger-Propagator

Als ein erster Schritt sollten wir verifizieren, daß der Pfadintegralformalismus den Feynman-Propagator und die störungstheoretischen Regeln, die wir schon kennengelernt haben, wiedergibt.

Alles wird viel einfacher (und besser definiert!) sein, falls wir immer mit den Wickgedrehten Größen arbeiten. Anstelle des Feynman-Propagators sollten wir also den Schwinger-Propagator (Seite 13) finden.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 - \sum_i \frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 - V(\phi) \quad ; \quad i=1,2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E &\equiv -\mathcal{L}_M (t \rightarrow -i\tau) \quad [Seite 32] \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2} \sum_i (\partial_i \phi)^2 + V(\phi) \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi)$$

Konvention: $(\partial_\mu \phi)^2 = \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi$
impliziert euklidische Metrik,
sowie Einstein-Konvention.

$$S_E \equiv \int dt \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_E$$

Die Integration war früher von 0 bis β , aber dies kann nach Bedarf verallgemeinert werden, und wird daher hier nicht spezifiziert.

Seite 31:

$$G_\beta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}} \equiv \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle$$

Keine Operatoren und Zeitordnungen mehr — alles ist "einfach"!
Dazu scheint das Integral exponentiell zu konvergieren.

Störungstheorie:

$$S_E \equiv S_0 + S_I, \quad \text{wo } S_0 \equiv \text{der quadratische Teil}$$

$$\text{Notation: } \langle \dots \rangle_0 \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi (\dots) e^{-S_0}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_0}}$$

$$\Rightarrow G_\beta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp(-S_I) \rangle_0}{\langle \exp(-S_I) \rangle_0}$$

Man braucht nur eine Taylor-Entwicklung in S_I !

Das Wick-Theorem

Wir sind also Objekten der Art $\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_0$ begegnet.

Diese können durch das Wick-Theorem zu $\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_0$ usw. reduziert werden.

Um das zu sehen, tun wir Folgendes:

* Wir sammeln $\phi(x)$, $\forall x$, in einem einzigen Vektor \vec{v} .

* Dann ist $S_0 = \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v}$, wobei A eine Matrix ist. Wir nehmen an: $A^{-1} \exists, A^T = A$.

* Der Trick [Schwinger]: Einführung eines "Quellenvektors" \vec{J} .

$$\int d\vec{v} e^{-\frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} + \vec{J}^T \vec{v}} \stackrel{\substack{\vec{v} \rightarrow \vec{v} + A^{-1} \vec{J} \\ \vec{J}^T \rightarrow \vec{J}^T + \vec{J}^T A^{-1}}}{=} \int d\vec{v} e^{-\frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{J}^T A^{-1} \vec{J} - \frac{1}{2} \vec{J}^T A^{-1} \vec{J} + \vec{J}^T A^{-1} \vec{J} + \vec{J}^T A^{-1} \vec{J}}$$

$$\Leftrightarrow \int d\vec{v} e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j + J_i v_i} = e^{+\frac{1}{2} J_i A^{-1}_{ij} J_j} \int d\vec{v} e^{-\frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v}} = e^{+\frac{1}{2} J_i A^{-1}_{ij} J_j} \int d\vec{v} e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j} \equiv e^{W(\vec{J})}$$

$$\Rightarrow \langle v_i v_j \dots v_k \rangle_0 = \frac{\int d\vec{v} v_i v_j \dots v_k e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j}}{\int d\vec{v} e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j}} = \frac{\left(\frac{d}{dJ_i} \frac{d}{dJ_j} \dots \frac{d}{dJ_k} \right) e^{W(\vec{J})} \Big|_{\vec{J}=0}}{e^{W(0)}}$$

$$= \left(\frac{d}{dJ_i} \frac{d}{dJ_j} \dots \frac{d}{dJ_k} \right) e^{\frac{1}{2} J_i A^{-1}_{ij} J_j} \Big|_{\vec{J}=0}$$

$$= \left(\frac{d}{dJ_i} \frac{d}{dJ_j} \dots \frac{d}{dJ_k} \right) \left[1 + \frac{1}{2} J_i A^{-1}_{ij} J_j + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 J_i A^{-1}_{ij} J_j J_k A^{-1}_{kl} J_l + \dots \right] \Big|_{\vec{J}=0}$$

\Rightarrow

* $\langle 1 \rangle_0 = 1$

* Ungerade Anzahl von v's $\Rightarrow \langle \dots \rangle_0 = 0$.

* $\langle v_i v_j \rangle_0 = (A^{-1})_{ij} \equiv \underbrace{v_i v_j}$

* $\langle v_i v_j v_k v_l \rangle_0 = (A^{-1})_{ij} (A^{-1})_{kl} + (A^{-1})_{ik} (A^{-1})_{jl} + (A^{-1})_{il} (A^{-1})_{jk}$

Aufgabe 5.2

$$= \underbrace{v_i v_j}_{\dots} \underbrace{v_k v_l}_{\dots} + \underbrace{v_i v_k}_{\dots} \underbrace{v_j v_l}_{\dots} + \underbrace{v_i v_l}_{\dots} \underbrace{v_j v_k}_{\dots}$$

* im Allgemeinen:

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \rangle_0 = \sum_{\text{alle Kombinationen}} \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_0 \dots \langle \dots \phi(x_n) \rangle_0$$

Notation: $\int_P \equiv \begin{cases} \frac{1}{V} \sum_P, & V \text{ endlich} \\ \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4}, & V \text{ unendlich.} \end{cases}$

$\Rightarrow \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_0 = \int_{P,Q} e^{iP \cdot x + iQ \cdot y} \langle \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q) \rangle_0$

$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \int_{P,Q} \{ iP_\mu \tilde{\phi}(P) iQ_\nu \tilde{\phi}(Q) + m^2 \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q) \} e^{iP \cdot x + iQ \cdot x}$
 $= \frac{1}{2} \int_P \tilde{\phi}(-P) [P^2 + m^2] \tilde{\phi}(P)$

Nun: $\phi(x) = \int_P e^{iP \cdot x} \tilde{\phi}(P) \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{\phi}^*(P) = \tilde{\phi}(-P)$

Wir schreiben $\tilde{\phi}(P) = a(P) + ib(P) \Rightarrow \begin{cases} a(-P) = a(P) \\ b(-P) = -b(P) \end{cases}$

Das heißt, nur die Hälfte der Fourier-Komponenten sind unabhängig. Wir wählen diejenigen mit $P_0 > 0$ [oder, für $P_0 = 0$, $P_1 > 0$, usw.].

Dann ist:

$\langle \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q) \rangle_0 = \langle a(P)a(Q) + ib(P)a(Q) + ia(P)b(Q) - b(P)b(Q) \rangle_0$

$S_0 = \frac{1}{V} \sum_{P, P_0 > 0} (P^2 + m^2) [a^2(P) + b^2(P)]$

Durch Benutzung des gaussischen Integrals $\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}} = \frac{1}{2a}$ bekommen wir:

$\langle a(P)b(Q) \rangle_0 = \langle b(P)a(Q) \rangle_0 = 0$

$\langle a(P)a(Q) \rangle_0 = \frac{V}{2(P^2 + m^2)} [\delta_{P,Q} + \delta_{P,-Q}]$

$\langle b(P)b(Q) \rangle_0 = \frac{V}{2(P^2 + m^2)} [\delta_{P,Q} - \delta_{P,-Q}]$

$\Rightarrow \langle \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q) \rangle_0 = \frac{V \delta_{P,-Q}}{P^2 + m^2} = \frac{V \delta_{P+Q,0}}{P^2 + m^2} = \delta(P+Q) \cdot \frac{1}{P^2 + m^2}$

Jetzt können wir $V \rightarrow \infty$ schicken. Fazit:

$\langle \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q) \rangle_0 = \delta(P+Q) \cdot \frac{1}{P^2 + m^2}$

$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_0 = \int_P e^{iP \cdot (x-y)} \frac{1}{P^2 + m^2}$