1.7 Störungstheorie

Wir haben gelernt, daß alle interessante Information in den Green-Funktionen

$$G_T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T\{\hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_n)\, \hat{S}\} | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle} ,$$

$$\hat{S} = T\left\{ \exp\left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \hat{H}_I(t) \right] \right\} ,$$

und in deren Fourier-Transformationen enthalten ist. Jetzt sollten wir also diese Funktionen bestimmen.

Eine Bestimmung ist in der Tat möglich, falls $\hat{H}_I$ in einem angemessenen Sinne "klein" ist. Dann können wir $\hat{H}_I$ als eine Störung um den freien Fall behandeln.

Um das Prozedere zu illustrieren, betrachten wir die klassische Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \mathcal{L}_{int}$$

$$\mathcal{L}_{int} \equiv -\frac{1}{4!} \lambda \phi^4 .$$

Dann ist $\hat{H}_I = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{int} \Big|_{\phi \to \hat{\phi}_I} = \int d^3\vec{x}\, \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}_I^4(x)$.

Der Operator $\hat{S}$ wird, wie seine Definition verlangt, als eine Taylor-Reihe entwickelt. Weil offensichtlich

$$T\{\hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_n)\; T\{\hat{\phi}_I(y_1) \dots \hat{\phi}_I(y_m)\}\}$$
$$= T\{\hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_n) \hat{\phi}_I(y_1) \dots \hat{\phi}_I(y_m)\}$$

gilt, bekommen wir

$$G_T^{(n)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^j \frac{1}{j!} \langle 0 | T\{\hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_n) \left[\int d^4y\, \hat{\phi}_I^4(y)\right]^j\} | 0 \rangle}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^j \frac{1}{j!} \langle 0 | T\{\left[\int d^4y\, \hat{\phi}_I^4(y)\right]^j\} | 0 \rangle}$$

Um $\langle 0 | T\{\hat{\phi}_I(x_1) \dots\dots \hat{\phi}_I(y)\} | 0 \rangle$ zu berechnen, bedienen wir uns des <u>Wick-Theorems</u>.

Das Wick-Theorem

Seite 15 : $\langle 0 | T\{ \hat{\phi}_I(x) \hat{\phi}_I(y) \} | 0 \rangle = G_F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i0^+} e^{ip\cdot(y-x)}$.

Seite 12 : $\langle 0 | : \hat{O} : | 0 \rangle = 0$.

Im Allgemeinen:

$$\hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2) \equiv :\hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2): + \langle 0 | \hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2) | 0 \rangle$$

Weiterhin gilt [Aufgabe 4.2]

$$:\hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2): = :\hat{\phi}_I(x_2)\hat{\phi}_I(x_1): ,$$

und damit ist

$$\begin{aligned} T\{\hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y)\} &= \hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y)\,\Theta(x^0-y^0) + \hat{\phi}_I(y)\hat{\phi}_I(x)\,\Theta(y^0-x^0) \\ &= :\hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y): \left[\Theta(x^0-y^0) + \Theta(y^0-x^0)\right] \\ &\quad + \langle 0 | T\{\hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y)\} | 0 \rangle \\ &= :\hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y): + G_F(x,y) . \end{aligned}$$

Notation:

$$G_F(x,y) = \langle 0 | T\{\hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y)\} | 0 \rangle \equiv \underbrace{\hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y)} .$$

Behauptung:

$$\begin{aligned} T\{\hat{\phi}_I(x_1)\dots\hat{\phi}_I(x_n)\} &= :\hat{\phi}_I(x_1)\dots\hat{\phi}_I(x_n): \\ &+ \sum_{jk} :\hat{\phi}_I(x_1)\dots\cancel{\hat{\phi}_I(x_j)}\dots\cancel{\hat{\phi}_I(x_k)}\dots\hat{\phi}_I(x_n): \underbrace{\hat{\phi}_I(x_j)\hat{\phi}_I(x_k)} \\ &+ \sum_{jklm} :\hat{\phi}_I(x_1)\,\cancel{\hat{\phi}_I(x_j)}\,\cancel{\hat{\phi}_I(x_k)}\,\cancel{\hat{\phi}_I(x_l)}\,\cancel{\hat{\phi}_I(x_m)}\,\hat{\phi}_I(x_n): \underbrace{\hat{\phi}_I(x_j)\hat{\phi}_I(x_k)}\,\underbrace{\hat{\phi}_I(x_l)\hat{\phi}_I(x_m)} \\ &+ \dots \\ &+ \sum_{jklm\dots} \underbrace{\hat{\phi}_I(x_j)\hat{\phi}_I(x_k)}\,\underbrace{\hat{\phi}_I(x_l)\hat{\phi}_I(x_m)} \dots \end{aligned}$$

Beweis: $n=3$ in Aufgabe 4.3, der allgemeine Fall später mit anderen Methoden.

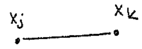
Setzen wir $T\{\hat\phi_I(x_1)\ldots\hat\phi_I(x_n)\}$ innerhalb von $\langle 0|\;|0\rangle$ ein, verschwinden alle normalgeordneten Terme! Das heißt,

$$\boxed{\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\ldots\hat\phi_I(x_n)\}|0\rangle = \sum_{\substack{\text{alle}\\ \text{Möglichkeiten}}} \hat\phi_I(x_j)\hat\phi_I(x_k)\;\hat\phi_I(x_l)\hat\phi_I(x_m)\;\ldots}$$

Insbesondere: $\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\ldots\hat\phi_I(x_n)\}|0\rangle = 0$ für alle ungeraden n.

Graphisch:

$$\hat\phi_I(x_j)\hat\phi_I(x_k) \equiv$$



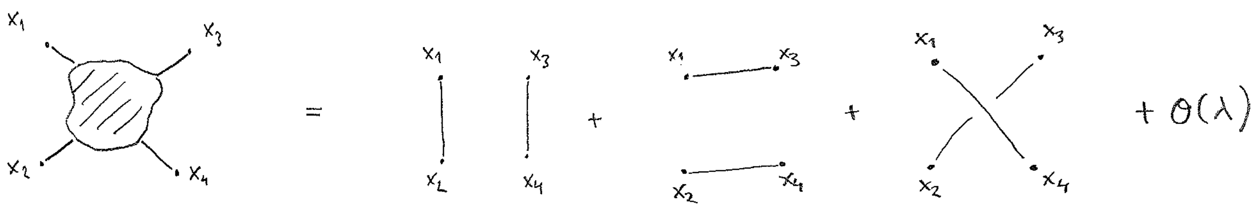
Als ein Beispiel, betrachten wir $G_T^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

<u>Ordnung λ^0</u>

$$G_T^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)\}|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}$$

1

$$\overset{\text{Wick}}{=} \hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)$$
$$+\ \hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)$$
$$+\ \hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)$$



Diese Diagramme gehören aber <u>nicht</u> zur $G_{T,c}^{(n)}$!

Ordnung λ^1

$$G_T^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)\,[\mathbb{1} - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\,]\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\mathbb{1} - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\,\}|0\rangle}$$

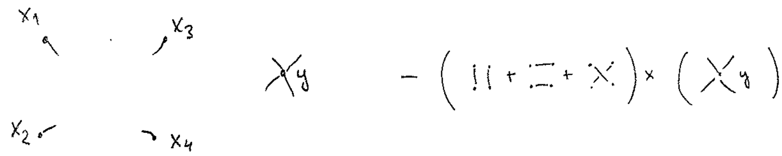
$$= \mathcal{O}(\lambda^0)$$

$$- \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y \Big[\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)\,\hat\phi_I^4(y)\}|0\rangle$$

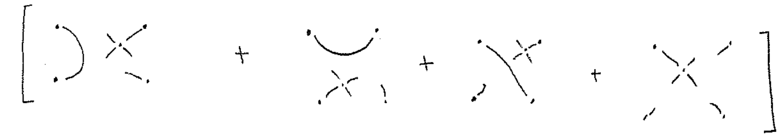
$$- \langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)\}|0\rangle\langle 0|T\{\hat\phi_I^4(y)\}|0\rangle \Big]$$

$$+ \mathcal{O}(\lambda^2).$$

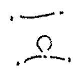
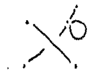
Graphisch:

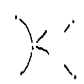
$[\ldots] =$ 

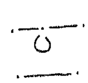
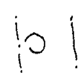
$\Rightarrow$ Wir müßen mindestens ein x_i mit y "Kontrahieren". Hier alle Möglichkeiten mit x_1.

$= 4\,[$  $]$

(a) (b) (c) (d)

(a) 4×3  (b) 4×3  (c) 4×3 

(d) $\underset{\text{mit } x_2:}{4}\,[\,3$  $+\,3$  $+\,3$  $]$

$= 4\times3$  $+\,4\times3$  $+\,4\times3$  $+\,4\times3\times2$ 

Zusammenhängend!

Zum Nachprüfen:

Anzahl Kontraktionen sollte sein: $7\times5\times3\times1 - 3\times3 = 105 - 9 = 96$

Wir haben gefunden: $6\times4\times3 + 4\times3\times2 = 72 + 24 = 96$ ok!

Weitere Schritte: Aufgabe 4.4.
