1.6 Green-Funktionen und LSZ-Reduktion

Im vorigen Kapitel haben wir ein Streumatrixelement S_{fi} definiert, $S_{fi} = \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m; in | \hat{S} | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; in \rangle$, in dem alles mit den "freien Feldern" $\hat{\phi}_{in}(t) = \hat{\phi}_I(t)$ ausgedrückt werden kann. Würden wir $\hat{S}$ in eine Störungsreihe in $\hat{H}_I$ entwickeln, könnten wir damit schon physikalische Größen berechnen. Bevor wir das tun, zeigt es sich allerdings als nützlich, S_{fi} noch mit theoretisch "schöneren" Größen, Green-Funktionen, in Beziehung zu bringen.

Allgemeine Definitionen: (vgl. S. 13)

$$G_T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T\{ \hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \} | 0 \rangle \qquad ; \ \hat{\phi}_H \text{ im Heisenberg-Bild}.$$

Es kann sein, daß $G_T^{(n)}$ einen Teil der Form $\langle 0|T\{\cdots\}|0\rangle\langle 0|T\{\cdots\}|0\rangle$ enthält; wir nennen solche Teile "nicht-zusammenhängend" ["disconnected"].

$$G_{T,c}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T\{ \hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \} | 0 \rangle_c \quad \longleftarrow$$

nur der zusammenhängende ["connected"] Teil wird berücksichtigt.

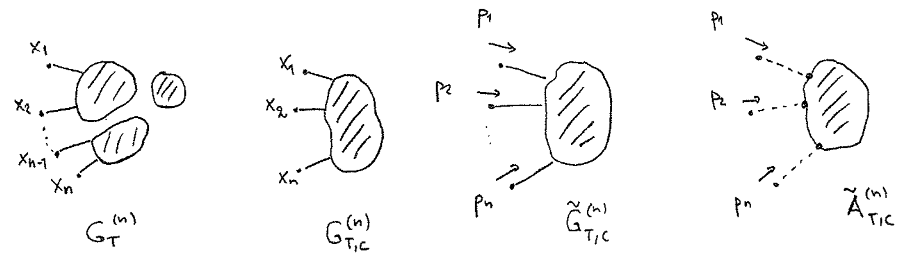
Fourier-Transformation:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n)\, \tilde{G}_{T,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \; G_{T,c}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\, e^{i(p_1\cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)}.$$

"Amputierung der externen Beine":

$$\tilde{A}_{T,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \left[\tilde{G}_{T,c}^{(2)}(p_1, -p_1)\right]^{-1} \cdots \left[\tilde{G}_{T,c}^{(2)}(p_n, -p_n)\right]^{-1} \tilde{G}_{T,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n).$$

Graphisch:



Notabene: Schon die volle 2-Punkt-Funktion $\tilde{G}_{T,c}^{(2)} =$  ist äußerst nichttrivial, und enthält fast alle Information über die Wechselwirkungen des Teilchens!

Drücken wir zuerst die Green-Funktionen mit den Dirac-Bild-Feldern $\hat{\phi}_I$ aus.
Die Beziehung von $\hat{\Phi}_I$ und $\hat{\Phi}_H$:

$$* \quad |t;I\rangle = e^{i\hat{H}_0 t}|t;S\rangle$$

$$= e^{i\hat{H}_0 t}e^{-i\hat{H}t}|0;S\rangle = e^{i\hat{H}_0 t}e^{-i\hat{H}(t-t_0)}e^{-i\hat{H}_0 t_0}|t_0;I\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{U}_I(t,t_0) = e^{i\hat{H}_0 t}e^{-i\hat{H}(t-t_0)}e^{-i\hat{H}_0 t_0} \qquad \text{[Aufgabe 3.3]}$$

$$* \quad \hat{\phi}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}_S e^{-i\hat{H}t} = e^{i\hat{H}t}e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{\phi}_I(t)e^{i\hat{H}_0 t}e^{-i\hat{H}t}$$

$$= \hat{U}_I^+(t,0)\,\hat{\phi}_I(t)\,\hat{U}_I(t,0)$$

Betrachten wir dann $G_T^{(n)}$. Falls zum Beispiel $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$, gilt:

$$G_T^{(n)} = \langle 0|\,\hat{\phi}_H(x_1)\cdots\hat{\phi}_H(x_n)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\,\hat{U}_I^+(t_1,0)\hat{\phi}_I(x_1)\hat{U}_I(t_1,0)\hat{U}_I^+(t_2,0)\hat{\phi}_I(x_2)\hat{U}_I(t_2,0)\;\ldots\;\hat{U}_I^+(t_n,0)\hat{\phi}_I(x_n)\hat{U}_I(t_n,0)\,|0\rangle$$

$$= \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)\left\{\hat{U}_I(T,0)\hat{U}_I^+(t_1,0)\,\hat{\phi}_I(x_1)\;\ldots\;\hat{\phi}_I(x_n)\hat{U}_I(t_n,0)\hat{U}_I^+(T,0)\right\}\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle$$

Aufgabe 3.3

$$\overset{?}{=} \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)\left\{\hat{U}_I(T,t_1)\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\hat{U}_I(t_n,-T)\right\}\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)\;T\left\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\,\hat{U}_I(T,t_1)\ldots\hat{U}_I(t_n,-T)\right\}\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\underbrace{\hat{U}_I^+(T,0)}\;T\left\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\hat{U}_I(T,-T)\right\}\underbrace{\hat{U}_I(-T,0)}|0\rangle$$

$$\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n| \qquad\qquad \mathbb{1} = \sum_m |m\rangle\langle m|$$

Jetzt schicken wir $T \to \infty$.
Es ist anzunehmen, daß die langen Zeitentwicklungen durch den Grundzustand dominiert werden [dies könnte mittels eines kleinen Imaginärteils in T garantiert werden].

$$\Rightarrow \quad \langle 0|\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle \overset{T\gg 1}{=} e^{i\alpha T}$$

$$\langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)|0\rangle \underset{\text{Aufgabe 3.3}}{=} \langle 0|\hat{U}_I(0,T)|0\rangle \overset{T\gg 1}{=} e^{i\beta T}$$

Aber dann ist

$$\langle 0|\hat{U}_I(T,0)|0\rangle = e^{-i\alpha T}$$

$$\langle 0|\hat{U}_I(0,-T)|0\rangle = e^{-i\beta T}$$

$$\Rightarrow \quad \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)|0\rangle\langle 0|\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle = e^{i\beta T}e^{i\alpha T} = \frac{1}{e^{-i\alpha T}e^{-i\beta T}} = \frac{1}{\langle 0|\hat{U}_I(T,0)\hat{U}_I(0,-T)|0\rangle}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_T^{(n)} = \frac{\langle 0|T\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\,\hat{S}\}|0\rangle}{\langle 0|\hat{S}|0\rangle} \quad \text{mit} \quad \hat{S} = \hat{U}_I(\infty,-\infty) = T\left\{\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\hat{H}_I(t)\right]\right\}}$$

Um uns jetzt in die Richtung der gewünschten Beziehung zu bewegen, erinnern wir uns an einige Matrixelemente des freien Skalarfeldes.

Seite 10:

$$\hat{\phi}_I(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \langle 0 | \hat{\phi}_I(x) | \vec{k}; in \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}_I(x)\, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{k}}}}\, e^{-ik\cdot x}$$

$$\langle \vec{p}; in | \hat{\phi}_I(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}}\, \hat{\phi}_I(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}\, e^{ip\cdot x}$$

Notabene:

(i) In der Literatur gibt es viele verschiedene Konventionen bzgl. Faktoren wie $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}$. Nur die physikalischen Endergebnisse sind immer dieselben.

(ii) Im Allgemeinen könnte $\hat{\phi}_I(x)$ anstelle eines "elementaren Feldes" auch ein "interpolierender Operator" sein. Dann führen wir eine "Normierungskonstante" Z_ϕ ein, und schreiben:

$$\langle 0 | \hat{\phi}_I(x) | \vec{k}; in \rangle = \frac{\sqrt{Z_\phi}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{k}}}}\, e^{-ik\cdot x} \qquad (\square)$$

$$\langle \vec{p}; in | \hat{\phi}_I(x) | 0 \rangle = \frac{\sqrt{Z_\phi}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}\, e^{ip\cdot x}$$

Das Streumatrixelement wird geschrieben als

$$S_{fi} = \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m; in | \hat{S} | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; in \rangle$$

$$\equiv \delta_{mn} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m; in | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; in \rangle + i\,(2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_m - k_1 - \dots - k_n)\, T(p_1, \dots, p_m | k_1, \dots, k_n) \; ,$$

wo das Transitionsmatrixelement T der Form

$$T = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_i}}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{k}_j}}}\, \mathcal{M}(p_1, \dots, p_m | k_1, \dots, k_n)$$

ist. Die Amplitude $\mathcal{M}$ tritt dann in der Goldenen Regel für den Streuquerschnitt auf [Elementarteilchenphysik].

Nun "sehen" wir, daß wir, um $\mathcal{M}$ zu bestimmen, zu tun haben mit:

* m Stück von $\langle \vec{p}; in|$, n Stück von $|\vec{k}; in\rangle$
* Aber, wie die Gleichungen ($\square$) auf Seite 23 zeigen, haben alle diese Objekte einen "Überlapp" mit $\hat{\phi}_I(x)|0\rangle$ bzw. $\langle 0|\hat{\phi}_I(x)$. D.h., sie können durch $\hat{\phi}_I$'s ersetzt werden!
* Man braucht allerdings Fourier-Transformationen, um die Impulse p_i, k_j aus den Koordinaten x_i zu bekommen.
* Weiterhin stehen die $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}$'s außerhalb der $\mathcal{M}$: die "externen Beine" müßen "amputiert" werden.

In der Tat führt ein recht mühsamer Beweis zum folgenden Endergebnis, genannt die LSZ-Reduktionsformel [H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1 (1955) 205]:

$$\boxed{\mathcal{M}(p_1,\dots,p_m|k_1,\dots,k_n) = (-i)\; Z_\phi^{\frac{n+m}{2}}\; \tilde{A}^{(n+m)}_{T,c}(-p_1,\dots -p_m, k_1,\dots,k_n)}$$

kürzt sich gegen $+i$ in der Definition $S_{fi} = \delta_{fi} + i\,T_{fi}$.

in $\tilde{A}_{T,c}$ hatten wir alle Impulse einlaufend, hier müßen also Minuszeichen auftreten, für die auslaufenden Impulse

$\tilde{G}^{(n+m)}_{T,c}$ hat $Z_\phi^{\frac{n+m}{2}}$ "zu viel", wird dann aber durch $[\tilde{G}^{(2)}_{T,c}]^{n+m}$ dividiert, so daß $\tilde{A}^{(n+m)}_{T,c}$ $Z_\phi^{-\frac{n+m}{2}}$ "zu wenig" hat, was korrigiert werden muß.

Fazit: Alle physikalische Information ist in Green-Funktionen enthalten. Wir müßen also lernen, sie zu berechnen!

— o —