1.4 Verschiedene Propagatoren

Wir werden jetzt verschiedene 2-Punkt-Green-Funktionen bzw. Propagatoren betrachten, die eine sehr wichtige Rolle in der Quantenfeldtheorie spielen.

$$W(x,y) \equiv \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle \qquad \text{"Wightman-Funktion"}$$

Falls $x^0 = y^0$, gilt $W(x,y) = W(y,x)$; im Allgemeinen aber $W(x,y) \neq W(y,x)$!
Dies erlaubt die Definition vieler nichttrivialer Größen :

* $$g(x,y) \equiv \langle 0 | \tfrac{1}{2} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle$$

$$\Delta(x,y) \equiv \langle 0 | \tfrac{1}{2} \{\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\} | 0 \rangle$$

$$G_R(x,y) \equiv i \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \Theta(x^0 - y^0) | 0 \rangle \qquad \text{retardierte Green-Funktion}$$

$$G_A(x,y) \equiv -i \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \Theta(y^0 - x^0) | 0 \rangle \qquad \text{avancierte Green-Funktion}$$

* $$G_F(x,y) \equiv \langle 0 | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) \Theta(x^0 - y^0) + \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) \Theta(y^0 - x^0) | 0 \rangle$$

$$\equiv \langle 0 | T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\} | 0 \rangle \qquad \text{"Zeitgeordnete Green-Funktion" bzw. "Feynman-Propagator"}$$

* $$G_E(\tilde{x},\tilde{y}) \equiv \langle 0 | \hat{\phi}(\tilde{x}) \hat{\phi}(\tilde{y}) \Theta(\tilde{x}^0 - \tilde{y}^0) | 0 \rangle + \hat{\phi}(\tilde{y}) \hat{\phi}(\tilde{x}) \Theta(\tilde{y}^0 - \tilde{x}^0)$$

wobei $x^0 \equiv -i\tilde{x}^0$, $y^0 \equiv -i\tilde{y}^0$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{x}^0 \equiv ix^0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}^0 \equiv iy^0 \in \mathbb{R}$

"Euklidische Green-Funktion" bzw. "Schwinger-Propagator".

Die mit Stern markierten Funktionen sind für uns die wichtigsten. Wir zeigen zuerst, daß $g(x,y)$ tatsächlich nichttrivial ist, und finden dann die Beziehungen zwischen den drei $*$-Funktionen.

$$\rho(x,y) = \langle 0 | \tfrac{1}{2} [\hat\phi(x), \hat\phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\vec p, \vec q} \langle 0 | \left[\hat a_{\vec p} e^{-ip\cdot x} + \hat a^\dagger_{\vec p} e^{ip\cdot x} \, , \, \hat a_{\vec q} e^{-iq\cdot y} + \hat a^\dagger_{\vec q} e^{iq\cdot y} \right] | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\vec p, \vec q} \langle 0 | \, [\hat a_{\vec p}, \hat a^\dagger_{\vec q}] e^{iq\cdot y - ip\cdot x} + [\hat a^\dagger_{\vec p}, \hat a_{\vec q}] e^{ip\cdot x - iq\cdot y} \, | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 \, 2E_{\vec p}} \left\{ e^{iE_{\vec p}(y^0 - x^0) + i\vec p\cdot(\vec x - \vec y)} - e^{iE_{\vec p}(x^0 - y^0) + i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)} \right\}$$

$\vec p \to -\vec p$ im zweiten Teil

$$\overset{\curvearrowright}{=} \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 \, 2E_{\vec p}} e^{i\vec p\cdot(\vec x - \vec y)} \, \frac{e^{iE_{\vec p}(y^0 - x^0)} - e^{-iE_{\vec p}(y^0 - x^0)}}{2}$$

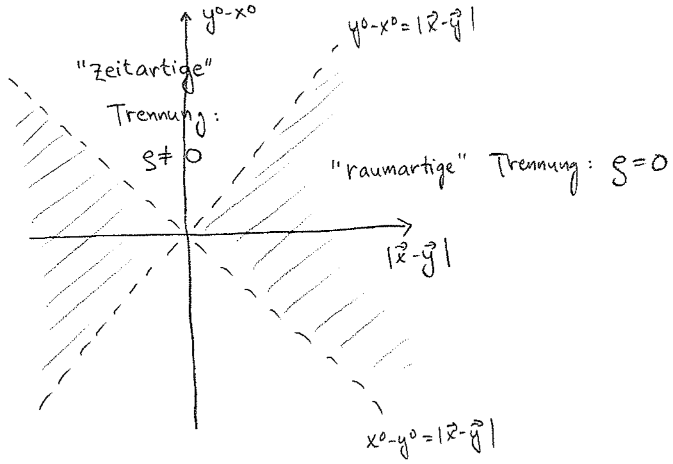
<u>Also</u>:

* für $x^0 = y^0$ ist $\rho(x,y) = 0$.
* im Allgemeinen aber $\rho(x,y) \neq 0$!
* insbesondere:

$$\frac{\partial}{\partial y^0} \rho(x,y) \Big|_{x^0 = y^0}$$

$$= \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2E_{\vec p}} \cdot e^{i\vec p\cdot(\vec x - \vec y)} \cdot \frac{2iE_{\vec p}}{2} = \frac{i}{2} \delta^{(3)}(\vec x - \vec y).$$

* von <u>Kausalität</u> her erwarten wir eigentlich [Beweis möglich]:



— o —

Notabene: $\rho(x,y)$ läßt sich umschreiben in

$$\rho(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cdot e^{ip^0(y^0 - x^0) - i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)} \left\{ \frac{\pi}{2E_{\vec p}} \left[\delta(p^0 - E_{\vec p}) - \delta(p^0 + E_{\vec p}) \right] \right\}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cdot e^{ip\cdot(y-x)} \left\{ \frac{\pi}{2p^0} \left[\delta(p^0 - E_{\vec p}) + \delta(p^0 + E_{\vec p}) \right] \right\}$$

Wir nennen $\{\ldots\}$ die <u>Spektralfunktion</u>.

Bestimmen wir dann $G_F(x,y)$.

$$\langle 0|\hat\phi(x)\hat\phi(y)|0\rangle = \int_{\vec p,\vec q} \langle 0|\left(\hat a_{\vec p} e^{-ip\cdot x} + \hat a^\dagger_{\vec p} e^{ip\cdot x}\right)\left(\hat a_{\vec q} e^{-iq\cdot y} + \hat a^\dagger_{\vec q} e^{iq\cdot y}\right)|0\rangle$$

$$= \int_{\vec p,\vec q} \langle 0|\hat a_{\vec p}\hat a^\dagger_{\vec q}\, e^{iq\cdot y - ip\cdot x}|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}\, e^{iE_{\vec p}(y^0-x^0) - i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)}$$

$$\Rightarrow \quad G_F(x,y) = \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 2E_{\vec p}} \left\{ \Theta(x^0-y^0)\, e^{iE_{\vec p}(y^0-x^0)} + \Theta(y^0-x^0)\, e^{iE_{\vec p}(x^0-y^0)} \right\} e^{-i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)}$$

Bemerkung: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik\tau}}{k^2-E^2+i\varepsilon} = -\frac{i}{2E}\left\{\Theta(-\tau)e^{iE\tau} + \Theta(\tau)e^{-iE\tau}\right\}$ [Aufgabe 3.1]

Das heißt,

$$G_F(x,y) = i\int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3}\, e^{-i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(y^0-x^0)}}{k^2-E_{\vec p}^2+i0^+}$$

Substitution $k\to p^0$
$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i0^+}\, e^{ip\cdot(y-x)}$$
, wo $p^2 \equiv (p^0)^2 - \vec p^{\,2}$

Letztendlich $G_E(\tilde x,\tilde y)$:

$$G_E(\tilde x,\tilde y) = \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 2E_{\vec p}} \left\{\Theta(\tilde x^0-\tilde y^0)\, e^{+E_{\vec p}(\tilde y^0-\tilde x^0)} + \Theta(\tilde y^0-\tilde x^0)\, e^{E_{\vec p}(\tilde x^0-\tilde y^0)}\right\} e^{-i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)}$$

Bemerkung: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde k}{2\pi} \frac{e^{i\tilde k\tau}}{\tilde k^2+E^2} = \frac{1}{2E}\left\{\Theta(-\tau)e^{E\tau} + \Theta(\tau)e^{-E\tau}\right\}$ [Aufgabe 3.1]

$$\Rightarrow \quad G_E(\tilde x,\tilde y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde p^0)^2+\vec p^{\,2}+m^2}\, e^{i\tilde p^0(\tilde y^0-\tilde x^0) - i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)} \quad ; \quad P \equiv (\tilde p^0, \vec p)$$

Substitution $\vec p\to -\vec p$
$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2+m^2}\, e^{i\tilde p^0(\tilde y^0-\tilde x^0) + i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)} \quad ; \quad P^2 \equiv (\tilde p^0)^2 + (\vec p)^2$$

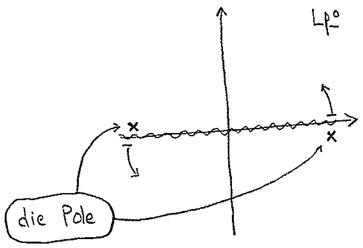
Fazit :

1. Der "einfachste" Propagator ist der euklidische Schwinger-Propagator: keine Minuszeichen und Imaginärelemente.

   Wie wir später sehen werden, ist der wichtigste für uns jedoch der Feynman-Propagator, der im Minkowski-Raum definiert ist.

2. Diese zwei können mit einer Wick-Drehung (analytische Fortsetzung) ineinander umgewandelt werden:

$$G_{\mp}(x,y) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i0^+} e^{ip^0(y^0-x^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}$$

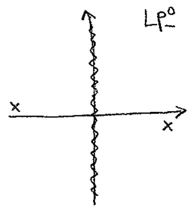


$\Longrightarrow$

S.13: $iy^0 = \tilde{y}^0$

$p^0 \equiv i\tilde{p}^0$

$dp^0 = i d\tilde{p}^0$



$$G_E(\tilde{x},\tilde{y}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\tilde{p}^0}{2\pi} \frac{1}{(\tilde{p}^0)^2 + E_{\vec{p}}^2} e^{i\tilde{p}^0(\tilde{y}^0-\tilde{x}^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}$$

3. Der Feynman-Propagator erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung für $x \neq y$:

$$\left[\partial_x^\mu \partial_{x\mu} + m^2\right] G_{\mp}(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\left(-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2\right)}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i0^+} e^{ip\cdot(y-x)}$$

$$= -i\,\delta^{(4)}(y-x) \quad .$$

4. Die Spektralfunktion hat auch eine bestimmte Beziehung zw. $G_{\mp}$ und G_E [Aufgabe 3.2].

— o —