1.3 Kanonische Quantisierung eines freien Skalarfeldes

Anfangspunkt:

Seite 3: $$H = \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2}\left[\pi(x^0,\vec{x})\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[\partial_i\phi(x^0,\vec{x})\right]^2 + \frac{1}{2}m^2\left[\phi(x^0,\vec{x})\right]^2 \right\},$$

$$\pi(x^0,\vec{x}) = \partial_0\phi(x^0,\vec{x}).$$

Jetzt also drei Schritte, wie für ein klassisches Teilchen:

(i) $\phi \to \hat{\phi}$, $\pi \to \hat{\pi}$, $H \to \hat{H}$

(ii) "kanonische" Variablen werden durch gleichzeitige Vertauschungsrelationen "<u>normiert</u>":

$$\left[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{\phi}(x^0,\vec{y})\right] = \left[\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{\pi}(x^0,\vec{y})\right] \equiv 0$$

$$\left[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{\pi}(x^0,\vec{y})\right] \equiv i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

(iii) die <u>Dynamik</u> folgt aus den Heisenberg-Gleichungen:

$$i\partial_0\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) \equiv \left[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}\right],$$

$$i\partial_0\hat{\pi}(x^0,\vec{x}) \equiv \left[\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}\right].$$

Wir schreiben (nach partieller Integration)

$$\hat{H} = \int d^3\vec{y} \left\{ \frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\hat{\phi}\left[-\vec{\nabla}^2 + m^2\right]\hat{\phi} \right\},$$

und bekommen [Übung]

$$\left[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}\right] = \int d^3\vec{y}\; \hat{\pi}(x^0,\vec{y})\left[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{\pi}(x^0,\vec{y})\right] = i\,\hat{\pi}(x^0,\vec{x})$$

$$\left[\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}\right] = \int d^3\vec{y}\; \left[\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{\phi}(x^0,\vec{y})\right](-\vec{\nabla}^2+m^2)\hat{\phi}(x^0,\vec{y})$$

$$= -i\,(-\vec{\nabla}^2+m^2)\hat{\phi}(x^0,\vec{x}).$$

Damit ist

$$\partial_0^2\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \partial_0\hat{\pi}(x^0,\vec{x}) = (\vec{\nabla}^2 - m^2)\hat{\phi}(x^0,\vec{x})$$

$$\Leftrightarrow \left[\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2\right]\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = 0$$

$\Rightarrow$ $\hat{\phi}(x^0,\vec{x})$ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung!

Also ist wieder die quantisierte Zeitentwicklung der klassischen äquivalent.

Wie man in der Elementarteilchenphysik lernt, kann die Klein-Gordon-Gleichung mit Hilfe von <u>ebenen Wellen</u> gelöst werden.

Ansatz: $\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \hat{N}(p)\cdot e^{-ip_\mu x^\mu}$

$$\Rightarrow \left(-p_0^2+\vec{p}^2+m^2\right)\hat{N}(p) = 0 \quad ; \quad \text{Sei } E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \Rightarrow p_0 = \pm E_{\vec{p}} .$$

Eine allgemeine Lösung ist eine Linearkombination ebener Wellen:

$$\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \int d^3\vec{p}\left[\hat{N}_+(\vec{p})e^{-iE_{\vec{p}}x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{N}_-(\vec{p})e^{iE_{\vec{p}}x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$= \int d^3\vec{p}\left[\hat{N}_+(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + \hat{N}_-(-\vec{p})e^{ip\cdot x}\right] \Bigg|_{p\cdot x \equiv p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu \,;\; p^0 \equiv E_{\vec{p}}}$$

$\begin{cases} \vec{p}\to-\vec{p} \text{ im zweiten Teil} \\ p \equiv (E_{\vec{p}},\vec{p}) \end{cases}$

Wir schreiben jetzt:

$$\hat{N}_+(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\hat{a}_{\vec{p}} ,$$

$$\hat{N}_-(-\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} .$$

Um noch $\left[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}),\partial_0\hat{\phi}(x^0,\vec{y})\right] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ zu respektieren, müßen $\hat{a}_{\vec{p}}$, $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ bestimmte Vertauschungsrelationen erfüllen.

<u>Behauptung</u>:

$$[\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{a}^\dagger_{\vec{p}},\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = 0 ,$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) .$$

<u>Beweis</u>:

$$\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \int\frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}\right]$$

$$\partial_0\hat{\phi}(y^0,\vec{y}) = \int\frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{q}}}}\left[-iE_{\vec{q}}\,\hat{a}_{\vec{q}}e^{-iq\cdot y} + iE_{\vec{q}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{iq\cdot y}\right]$$

$$\Rightarrow [\hat{\phi}(x),\partial_0\hat{\phi}(y)] = \int_{\vec{p},\vec{q}}\left\{ iE_{\vec{q}}\underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}]}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})}e^{-ip\cdot x+iq\cdot y} - iE_{\vec{q}}\underbrace{[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}},\hat{a}_{\vec{q}}]}_{-\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})}e^{ip\cdot x-iq\cdot y}\right\}$$

$$= \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}\cdot iE_{\vec{p}}\cdot\left\{e^{iE_{\vec{p}}(y^0-x^0)+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)+i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}\right\}$$

$$\overset{x^0=y^0}{=} i\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \quad \square .$$

Setzen wir $\hat{\phi} = \overbrace{\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}}^{\equiv \int_{\vec{p}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right]$ in $\hat{H}$ ein, bekommen wir

$$\hat{H} = \int_{\vec{x}} \left\{ \tfrac{1}{2}\partial_0\hat{\phi}\,\partial_0\hat{\phi} + \tfrac{1}{2}\partial_i\hat{\phi}\,\partial_i\hat{\phi} + \tfrac{1}{2}m^2\hat{\phi}\hat{\phi} \right\}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int_{\vec{x}}\int_{\vec{p}}\int_{\vec{q}} \Big\{ & \left[-iE_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot x} + iE_{\vec{p}}\,\hat{a}^{+}_{\vec{p}}\,e^{ip\cdot x}\right]\left[-iE_{\vec{q}}\,\hat{a}_{\vec{q}}\,e^{-iq\cdot x} + iE_{\vec{q}}\,\hat{a}^{+}_{\vec{q}}\,e^{iq\cdot x}\right] \\
&+ \left[ip_i\,\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot x} - ip_i\,\hat{a}^{+}_{\vec{p}}\,e^{ip\cdot x}\right]\left[iq_i\,\hat{a}_{\vec{q}}\,e^{-iq\cdot x} - iq_i\,\hat{a}^{+}_{\vec{q}}\,e^{iq\cdot x}\right] \\
&+ m^2\left[\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\,e^{ip\cdot x}\right]\left[\hat{a}_{\vec{q}}\,e^{-iq\cdot x} + \hat{a}^{+}_{\vec{q}}\,e^{iq\cdot x}\right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int_{\vec{x}}\int_{\vec{p}}\int_{\vec{q}} \Big\{ & \left[-E_{\vec{p}}E_{\vec{q}} - \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right]\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{q}}\, e^{-iE_{\vec{p}}x^0 - iE_{\vec{q}}x^0 + i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \\
&+ \left[E_{\vec{p}}E_{\vec{q}} + \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right]\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^{+}_{\vec{q}}\, e^{-iE_{\vec{p}}x^0 + iE_{\vec{q}}x^0 + i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \\
&+ \left[E_{\vec{p}}E_{\vec{q}} + \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right]\hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{q}}\, e^{iE_{\vec{p}}x^0 - iE_{\vec{q}}x^0 - i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \\
&+ \left[-E_{\vec{p}}E_{\vec{q}} - \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right]\hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}^{+}_{\vec{q}}\, e^{iE_{\vec{p}}x^0 + iE_{\vec{q}}x^0 - i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}} \Big\{ & (2\pi)^3 \big[\underbrace{-E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2}_{0}\big]\,\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}_{-\vec{p}}\, e^{-2iE_{\vec{p}}x^0} \\
&+ (2\pi)^3 \left[E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2\right]\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{+}_{\vec{p}} \\
&+ (2\pi)^3 \left[E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2\right]\hat{a}^{+}_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}} \\
&+ (2\pi)^3 \big[\underbrace{-E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2}_{0}\big]\,\hat{a}^{+}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{+}_{-\vec{p}}\, e^{2iE_{\vec{p}}x^0} \Big\}
\end{aligned}$$

$$= \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}}\; \frac{1}{2}\left(\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^{+}_{\vec{p}} + \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\right).$$

Dieser ist offensichtlich ein hermitescher Operator $\Rightarrow$ Eigenwerte sind reell!

Vertauschungsrelationen ($[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$):

$$[\hat{H}, \hat{a}_{\vec{k}}] = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}}\; \frac{1}{2}\Big\{ \hat{a}_{\vec{p}}\underbrace{[\hat{a}^{+}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{k}}]}_{-\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})} + \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{k}}]}_{0}\hat{a}^{+}_{\vec{p}} + \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{k}}]}_{0} + \underbrace{[\hat{a}^{+}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{k}}]}_{-\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})}\hat{a}_{\vec{p}} \Big\}$$

$$= -E_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}}] = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}}\; \frac{1}{2}\Big\{ \hat{a}_{\vec{p}}\underbrace{[\hat{a}^{+}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}}]}_{0} + \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}}]}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})}\hat{a}^{+}_{\vec{p}} + \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}}]}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})} + \underbrace{[\hat{a}^{+}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}}]}_{0}\hat{a}_{\vec{p}} \Big\}$$

$$= +E_{\vec{k}}\,\hat{a}^{+}_{\vec{k}}.$$

Energie - Eigenzustände

Sei $|\Psi\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$. Dann ist:

$$\hat{H}\hat{a}_{\vec{k}}|\Psi\rangle = \left([\hat{H},\hat{a}_{\vec{k}}] + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{H}\right)|\Psi\rangle = \left(-E_{\vec{k}} + E_\Psi\right)\hat{a}_{\vec{k}}|\Psi\rangle$$

$\Rightarrow$ $\hat{a}_{\vec{k}}|\Psi\rangle$ ist ein Eigenzustand mit Energie $E_\Psi - E_{\vec{k}}$

analog: $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\Psi\rangle$ —— " —— $E_\Psi + E_{\vec{k}}$

Wie für den harmonischen Oszillator nehmen wir jetzt an, daß es einen Zustand $|0\rangle$, das Vakuum, gibt, mit minimaler Energie: $\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \;\; \forall \vec{k}$.

Die anderen Zustände sind dann von der Form

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle \qquad \text{(Einteilchenzustände)}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_1}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_n}|0\rangle \equiv |\vec{k}_1,\vec{k}_2,\ldots,\vec{k}_n\rangle \qquad \text{(Mehrteilchenzustände)}$$

Sie bilden einen Fock-Raum.

Normierung:

$$\langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle = \langle 0|\hat{a}_{\vec{k}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|0\rangle$$

$$= \langle 0|\left\{[\hat{a}_{\vec{k}'},\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}] + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\right\}|0\rangle = \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) \qquad \text{usw.}$$

—— o ——

Frage: Was ist die Energie des Vakuumzustandes?

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}}\,\frac{1}{2}\,\langle 0|\underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}}_{\delta^{(3)}(\vec{0}) + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}}\,\frac{1}{2}\,\delta^{(3)}(\vec{0}) = \infty\,!$$

Eigentlich ist dies kein Problem, weil $\langle 0|\hat{H}|0\rangle$ in der Teilchenphysik (ohne Schwerkraft) keine Meßgröße ist. Jedoch führt man oft einen Trick ein, der das Problem "löst": "Normalordnung".

$$:\hat{O}: \;\equiv\; \text{"}\hat{O} \text{ mit allen } \hat{a}_{\vec{p}}\text{'s nach rechts verschoben"}$$

$$:\hat{H}: \;=\; \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$$

Dann ist $\langle 0|:\hat{H}:|0\rangle = 0$.

—— o ——