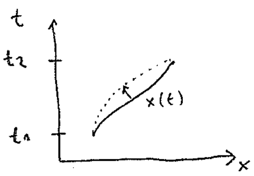
1. Kanonische Quantisierung von Skalarfeldern

1.1. Klassische Feldtheorie im Lagrange- und Hamilton-Formalismus

Fangen wir mit einem klassischen Teilchen an.

* Kinetische Energie $\equiv T \equiv \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
* Potentielle Energie $\equiv V = V(x)$
* Lagrange-Funktion $\equiv L \equiv T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) = L(x, \dot{x})$
* Wirkung $\equiv S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(x, \dot{x})$

Das Prinzip der minimalen Wirkung besagt, daß das Teilchen dem Pfad $x(t)$ folgt, der die Wirkung minimiert. Also müßen wir variieren:



$$x(t) \to x'(t) = x(t) + \delta x(t)$$

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0.$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x})$$

$$\approx S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right\} \qquad \Big| \; \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x(t)$$

$$= S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right\} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta x$$

Verschwindet wegen $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0.$

Muß für alle δx verschwinden!

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \ddot{x} = - \frac{\partial V}{\partial x}$ OK!

Hamilton-Formalismus folgt aus diesem Lagrange-Formalismus:

* Kanonischer Impuls $\equiv p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$
* Hamilton-Funktion $\equiv H \equiv p \dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + V(x) = H(x, p)$
* Hamilton-Gleichungen: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \; ; \; \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x}$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = m \ddot{x} = - \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{OK!}$$

Also sind sowohl der Lagrange- als auch der Hamilton-Formalismus dem Newtonschen äquivalent. Jedoch lassen die beiden sich leichter quantisieren als der Newton-Formalismus.

Betrachten wir jetzt klassische Felder.

Freiheitsgrad: $x \rightarrow \phi$

Koordinaten: $t \rightarrow x^\mu \equiv (x^0, x^i) \equiv (ct, \vec{x})$

Relativistische Notation: $\eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu}$; $x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu$; $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$

Einstein-Konvention: $\eta_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\nu$ usw.

$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$; $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Verallgemeinern wir die Definitionen der klassischen Mechanik zu diesem Fall:

* Lagrange-Dichte $\equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
* Lagrange-Funktion $\equiv L[\phi, \partial_\mu \phi] \equiv \int_V d^3\vec{x}\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
* Wirkung $\equiv S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[\phi, \partial_\mu \phi]$.

Das Prinzip der minimalen Wirkung bleibt unverändert. Sei $\Omega = [t_1, t_2] \times V$ das Viervolumen.

$$\Rightarrow \quad S' = \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi')$$

$$\approx S + \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} \quad ; \quad \delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi' - \partial_\mu \phi = \partial_\mu(\phi' - \phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$$

$$= S + \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right\} + \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \right\} \delta\phi$$

$$= S + \underbrace{\int_{\partial\Omega} dS\, n_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right\}}_{\text{verschwindet falls } \delta\phi = 0 \text{ an der Oberfläche}} + \text{——}\,''\,\text{——}$$

$\Rightarrow$ die Euler-Lagrange-Gleichung: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = 0$.

Zum Beispiel:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \partial^\mu \phi\, \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad \Rightarrow \quad [\partial^\mu \partial_\mu + m^2]\phi = 0 .$$

Klein-Gordon-Gleichung!

Wie gehen wir jetzt über zum Hamilton — Formalismus?

* Kanonischer Impuls $\equiv \pi(x) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial^0\phi = \partial_0\phi$

* Hamilton — Dichte folgt durch eine Legendre - Transformation, wie schon für ein Teilchen:

$$\mathcal{H}(\phi,\pi) = \pi\,\partial_0\phi - \mathcal{L}$$
$$= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\partial_i\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

* Die Hamilton — Gleichungen lassen sich auch verallgemeinern.

— ∘ —

Ein wichtiger Vorteil des Lagrange — Formalismus ist, daß die Beziehung von Erhaltungsgrößen und Symmetrien bzw. Invarianzen durch das Noether - Theorem [Emmy Noether 1918] im wesentlichen erklärt wird.

Die Euler- Lagrange- Gleichung folgte aus $\delta S = 0$ indem wir ϕ mit fixierten Randbedingungen auf $\partial\Omega$ variierten.

Es gibt aber auch andere Sorten von Transformationen, wo S, oder sogar der lokale Beitrag ΔS zum ganzen S, invariant bleibt. Zum Beispiel:

* Raumzeit- bzw. Koordinatentransformationen wie Translation.
  [d.h., die Bahn eines Teilchens hat diegleiche Form, unabhängig davon, wann wir es in Bewegung setzen.]
* "Innere" Symmetrien, indem wir ähnliche Felder gegeneinander austauschen.
  [d.h., die Lösung von $\delta S = 0$ ist nicht eindeutig.]

Zum Beispiel: Invarianz in 4er-Translation $\Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$,
wo $T^{\mu\nu} \equiv$ Energieimpulstensor.

Insbesondere: $T^{00} = \mathcal{H}$ [Aufgabe 1.1].

Eine allgemeine Herleitung des Noether - Theorems folgt auf der nächsten Seite, und spezifische Beispiele sind in Aufgaben 1.1, 1.2 und 1.4 zu betrachten.

— ∘ —

Appendix: Herleitung des Noether-Theorems

Betrachten wir eine gleichzeitige Transformation der Raumzeitkoordinaten $[x^\mu \to x^{\mu'} \equiv x^\mu + \delta x^\mu]$ und der Felder $[\phi^a(x) \to \phi^{a'}(x') \equiv \phi^a(x) + \delta\phi^a(x)]$. Die Transformation sei parametrisiert durch $\delta\omega^i$, die δx^μ und $\delta\phi^a(x)$ mittels Generatoren bestimmen:

$$\delta x^\mu \equiv X^\mu_{\ i}(x)\,\delta\omega^i,$$
$$\delta\phi^a(x) \equiv \Phi^a_{\ i}(x)\,\delta\omega^i.$$

Wir nehmen an, daß für die Wirkung ΔS in einem kleinen Volumenelement Δ gilt:

$$\Delta S' \equiv \int_\Delta d^4x'\, \mathcal{L}\left(\phi^{a'}(x'),\, \partial'_\mu \phi^{a'}(x')\right) = \Delta S + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2,$$

falls $\delta\omega^i$ ortsunabhängig sind und $\phi^a(x)$ die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen.

Die Variationen:

* $$d^4x' = \det\left[\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\right] d^4x = \det\left[\delta^\mu_{\ \nu} + \partial_\nu\left(X^\mu_{\ i}\,\delta\omega^i\right)\right] d^4x$$
$$\underset{\det[\mathbb{1}+A] = 1+Sp[A]+\mathcal{O}(A^2)}{=} \left[1 + \partial_\mu\left(X^\mu_{\ i}\,\delta\omega^i\right)\right] d^4x + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2.$$

* $$\mathcal{L}\left(\phi^{a'}, (\partial_\mu\phi^a)'\right) = \mathcal{L}\left(\phi^a, \partial_\mu\phi^a\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\,\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\,\delta(\partial_\mu\phi^a) + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2.$$

Hier $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\right]$ und $\delta(\partial_\mu\phi^a) = \partial'_\mu\phi^{a'} - \partial_\mu\phi^a = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\,\partial_\nu\phi^{a'} - \partial_\mu\phi^a$

$$\underset{x^\nu = x^{\nu'} - X^\nu_{\ i}\,\delta\omega^i}{=} \left[\delta^\nu_{\ \mu} - \partial_\mu\left(X^\nu_{\ i}\,\delta\omega^i\right)\right]\partial_\nu\phi^{a'} - \partial_\mu\phi^a + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2$$
$$= \partial_\mu\left(\phi^{a'} - \phi^a\right) - \partial_\mu\left(X^\nu_{\ i}\,\delta\omega^i\right)\partial_\nu\phi^a + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2$$
$$= \partial_\mu\left(\Phi^a_{\ i}\,\delta\omega^i\right) - \partial_\mu\left(X^\nu_{\ i}\,\delta\omega^i\right)\partial_\nu\phi^a + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2.$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\left(\phi^{a'}, \partial'_\mu\phi^{a'}\right) = \mathcal{L}\left(\phi^a, \partial_\mu\phi^a\right) + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\right]\Phi^a_{\ i}\,\delta\omega^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\left[\partial_\mu\left(\Phi^a_{\ i}\,\delta\omega^i\right) - \partial_\mu\left(X^\nu_{\ i}\,\delta\omega^i\right)\partial_\nu\phi^a\right] + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2$$

Damit wird:

$$\Delta S' = \Delta S + \int_\Delta d^4x \left\{ \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\,\Phi^a_{\ i}\,\delta\omega^i\right] + \left[\underbrace{\mathcal{L}\,\delta^\mu_{\ \nu}}_{\text{aus } d^4x'} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\,\partial_\nu\phi^a\right]\partial_\mu\left(X^\nu_{\ i}\,\delta\omega^i\right) \right\} + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2.$$

Wir bemerken, daß:

$$\partial_\mu\left[\mathcal{L}\,\delta^\mu_{\ \nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\,\partial_\nu\phi^a\right] = \underbrace{\partial_\nu\mathcal{L}}_{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\partial_\nu\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\partial_\nu\partial_\mu\phi^a} - \partial_\nu\phi^a\,\underbrace{\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\right]}_{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\,\partial_\mu\partial_\nu\phi^a = 0 \ !$$

Wir definieren den Noether-Strom $\equiv j^\mu_{\ i} \equiv \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\right]\Phi^a_{\ i} + \left[\mathcal{L}\,\delta^\mu_{\ \nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\,\partial_\nu\phi^a\right]X^\nu_{\ i}$.

Dann gilt:

$$\Delta S' = \Delta S + \int_\Delta d^4x\, \partial_\mu\left\{j^\mu_{\ i}\,\delta\omega^i\right\} + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2 = \Delta S + \int_\Delta d^4x \left\{\partial_\mu j^\mu_{\ i}\right\}\delta\omega^i + \mathcal{O}(\delta\omega^i)^2.$$

Diese Gleichung gilt unabhängig von Δ und $\delta\omega^i$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\partial_\mu j^\mu_{\ i} = 0 \quad \forall i}$.