Einführung in die Methoden der theoretischen Physik II **Probeklausur** 20.07.2010

Keine Hilfsmittel. 6 Punkte / Aufgabe. 6 Punkte reichen zur Note 4,0.

Aufgabe 1:

(a) Ermitteln Sie den Gradienten des Skalarfeldes

$$\Phi = \frac{\cos\theta}{a\,r^2}$$

in Kugelkoordinaten ($a = \text{const}$).

(b) Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{v} = \left(\rho + \frac{k}{\rho}\right)\vec{e}_\varphi$$

in Zylinderkoordinaten ($k = \text{const}$).

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $B = \text{const.}$, durch den Mantel des Kegels $z = h - \sqrt{x^2+y^2}$, $0 < z < h$ (bitte skizzieren!).

Aufgabe 3: Betrachtet wird ein kugelsymmetrisches Vektorfeld $\vec{E} = q\,\vec{r}/r^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ wirbelfrei ist.

(b) Bestimmen Sie ein entsprechendes Skalarpotential.

(c) Verwenden Sie den Gaußschen Satz, um das Oberflächenintegral $I = \oint_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{E}$ zu berechnen. Hier ist S eine beliebige Oberfläche, die den Ursprung einschließt.

Aufgabe 4: Eine Funktion $f(x) \in \mathbb{R}$, definiert auf dem Intervall $x \in (-L/2, L/2]$, wird als L-periodische komplexe Fourier-Reihe entwickelt.

(a) Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Aussage:

$$\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}x\,[f(x)]^2 = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\,.$$

(b) Unter welchen Umständen sind alle c_n reell?

$$\nabla = \tfrac{\vec{e}_u}{h_u}\partial_u + \tfrac{\vec{e}_v}{h_v}\partial_v + \tfrac{\vec{e}_w}{h_w}\partial_w$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial_u(h_v h_w E_u)+\partial_v(h_w h_u E_v)+\partial_w(h_u h_v E_w)}{h_u h_v h_w}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\vec{e}_u & h_v\vec{e}_v & h_w\vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w \end{vmatrix}$$

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta) \quad \text{[Kugel]}$$

$$\vec{r} = (\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi,\, z) \quad \text{[Zylinder]}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{E} = \int_{\partial S}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\vec{E} = \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{E}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_P \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$f(x) = \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\tilde{f}(k)e^{ikx}$$

$$\tilde{f}(k) = \int\mathrm{d}x\, f(x)e^{-ikx}$$

$$\delta^{(d)}(\vec{r}) = \int\frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$