## 3.3 Diracsche Deltafunktion

[Lang & Pucker 15.3]

Fourier-Transformation (Seite 47): $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx}$ , $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$

(i) $\tilde{f}(k)$ im Ausdruck von $f(x)$ einsetzen (Integrationsvariable als $x \to y$ umnennen); Integrationsordnung ändern

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} \right\}}_{\overset{!}{=}\ \delta(x-y)\ :=\ \begin{cases} 0, & x \neq y \\ \int_{x-0^+}^{x+0^+} dy\, \delta(x-y) = 1 \end{cases}}$$

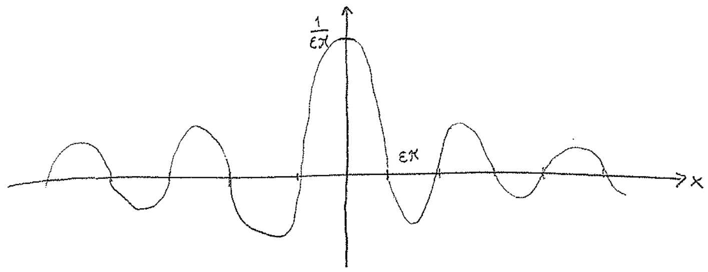
(ii) $f(x)$ im Ausdruck von $\tilde{f}(k)$ einsetzen (Integrationsvariable als $k \to q$ umnennen); Integrationsordnung ändern

$$\Rightarrow \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \tilde{f}(q) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(q-k)} \right\}}_{\delta(q-k)}$$

Wie sieht die „Diracsche Deltafunktion" $\delta(x)$ aus? Betrachte die obige Darstellung als Limes:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \frac{e^{ikx}}{2\pi i x} \right]_{k=-\frac{1}{\varepsilon}}^{k=\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi x} \cdot \frac{e^{\frac{ix}{\varepsilon}} - e^{-\frac{ix}{\varepsilon}}}{2i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\pi x}$$




$\Rightarrow$ für $\varepsilon \to 0$ ist die „Welle" schmal aber gespitzt (so dass $\int_{-0^+}^{+0^+} dx\, \delta(x) = 1$ gilt).

Einige andere Darstellungen (es gibt unendlich viele!):

$*$ $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$ (Aufgabe 10.1)

$*$ $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$ (wie in Aufgabe 10.2)

$*$ $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$ (Seite 49)

$*$ $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$ (Aufgabe 11.1)

$*$ $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \overset{!}{=} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x - i\varepsilon}$ (Aufgabe 11.1)

**Spielregeln**

Mathematisch gesehen ist $\delta$ eine „Distribution" (statt Funktion); sie wird durch ihren Einfluß auf „Testfunktionen" definiert. Testfunktionen sollen „glatt" sein (beliebig oft differenzierbar) und einen „kompakten Träger" haben (außerhalb eines beschränkten Gebiets verschwinden).

Sei $T(x)$ eine beliebige Testfunktion. Dann gilt:

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(x-y) = T(y) \qquad (\text{Definition von } \delta)$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta'(x-y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} \underbrace{\left[T(x)\,\delta(x-y)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T'(x)\, \delta(x-y)$$

$$= -T'(y) \qquad (\text{aus Definition von } \delta)$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta''(x-y) = \dots = T''(y) \qquad \text{usw.}$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(ax) = \frac{1}{a} \int_{-\infty\,\mathrm{sign}(a)}^{\infty\,\mathrm{sign}(a)} d(ax)\, T\!\left(\frac{ax}{a}\right) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, T\!\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y)$$

$$= \frac{1}{|a|} T(0) \quad \Rightarrow \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad !$$

Wir definieren auch die Stufenfunktion bzw. Heaviside-Funktion:

Anschaulich:
$$\Theta(x-y) = \begin{cases} 1, & x > y \\ 0, & x < y \end{cases} \qquad (\text{Wert bei } x=y \text{ undefiniert; z.B. } \tfrac{1}{2})$$

Durch Testfunktion:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \Theta(x-y) := \int_{y}^{\infty} dx\, T(x) .$$

Es gilt:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \Theta'(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x) \frac{d}{dx}\Theta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x) \left(-\frac{d}{dy}\right)\Theta(x-y)$$

$$= -\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\,\Theta(x-y) = -\frac{d}{dy} \int_{y}^{\infty} dx\, T(x) = T(y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Theta'(x-y) = \delta(x-y)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x'-y) = \Theta(x-y)} .$$

— o —

Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen:

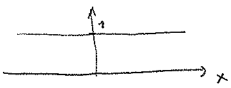
$$\vec{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}_0) := \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$

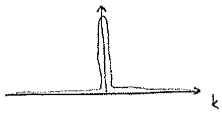
$$\vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k \Rightarrow \delta^{(3)}(\vec{r}) := \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3) \qquad \left(\text{„} = \prod_{k=1}^{3} \delta(x_k)\text{"}\right)$$

— o —

## Beispiele

(i) $f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \overset{\text{Seite 51}}{=} 2\pi\, \delta(k)$




Also wie bei „Unschärferelation": $k$ genau bekannt $\Rightarrow$ $x$ völlig unbekannt!
Es funktioniert auch in die umgekehrte Richtung:

$\tilde{f}(k) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \delta(x)$.

Dasselbe in $d$ Dimensionen: $\boxed{\int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \delta^{(d)}(\vec{r})}$

(ii) Behauptung:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \cos(k(y-x)) \\ 0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \sin(k(y-x)) \end{cases}$$

Beweis: Integrationsordnung ändern

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \cdot \overbrace{\frac{e^{ik(y-x)} + e^{ik(x-y)}}{2}}^{\cos(k(y-x))}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, \frac{\delta(y-x) + \delta(x-y)}{2} = f(x).$$

Bei Sinus kürzen sich die zwei Terme.

(iii) Parsevalsche Identität

Seien $f(x), g(x)$ zwei Funktionen und $\tilde{f}(k), \tilde{g}(k)$ ihre Fourier-Transformierten.

Es gilt:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, g^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, \tilde{g}^*(k).$$

Beweis:
$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$$
$$\tilde{g}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y)\, e^{iky}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, \tilde{g}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(y-x)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x)\, g^*(y)\, \delta(y-x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, g^*(x) \quad \square.$$

Die Identität funktioniert auch bei $g(x) \to f(x) \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, [f(x)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde{f}(k)|^2.$$ (vgl. Seite 49)

# Anwendung: Lösung von Differenzialgleichungen

Maxwell-Gleichungen im statischen Limes (Seite 39) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = \vec{0} \\ \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$

$\vec{E}$ ist wirbelfrei $\xRightarrow{\text{Seite 40}}$ $\vec{E} = -\nabla\phi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho}$ „Poisson-Gleichung"

Die Lösung der homogenen Gleichung wurde auf Seite 42 besprochen; jetzt suchen wir nach einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

**Behauptung:** Wenn wir $\boxed{\nabla^2_{\vec{r}}\, G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$ lösen können,

dann ist $\boxed{\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,'\; G(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')}$ die gesuchte Lösung.

**Beweis:** Nehme Ableitung $\Rightarrow$ $\nabla^2_{\vec{r}}\,\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,'\left[-4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]\rho(\vec{r}\,') = -4\pi\rho(\vec{r})$ $\square$

Die Fourier-Darstellung der „Greenschen Funktion" G und der Dirac-$\delta$:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\tilde{G}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \quad ; \quad \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

Desweiteren gilt: $\nabla^2_{\vec{r}}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)e^{ik_x x}e^{ik_y y}e^{ik_z z} = -\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

Jetzt also:

$$\boxed{\nabla^2_{\vec{r}}\,G(\vec{r}-\vec{r}\,') + 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = 0}$$

Fourier-Darstellung $\Rightarrow$ $\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\left[-\vec{k}^2\tilde{G}(\vec{k}) + 4\pi\right] = 0$

Lösung im $\vec{k}$-Raum $\Rightarrow$ $\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{\vec{k}^2}$

„Rücktransformation" $\Rightarrow$ $G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\cdot\frac{4\pi}{\vec{k}^2}\cdot e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \underset{\text{Seite 50}}{=} 4\pi\cdot\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

Lösung im $\vec{r}$-Raum $\Leftrightarrow$ $\boxed{G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$

(Vergleiche mit Aufgabe 4.2: $\nabla^2\frac{1}{r} = 0 \quad \forall\, r>0$ ; aber nicht bei $r=0$!)

Die gesuchte spezielle Lösung ist also

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,'\;\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

—— > ——