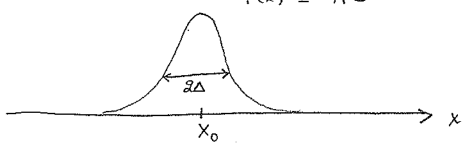
3.2 Fourier-Transformation

[Lang & Pucker 14.1, 3-4]

Was wenn keine Periodizität vorhanden ist / erwünscht ist?
Zum Beispiel: ein „Wellenpaket":

$$f(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Betrachte komplexe Fourier-Reihe mit Definitionsbereich $x \in (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ (Seite 44; Aufgabe 9.2):

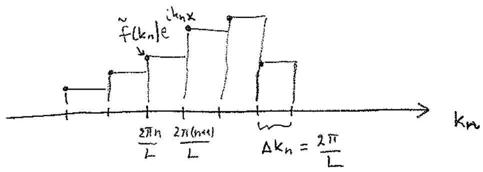
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i \frac{2\pi n}{L} x}, \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \, f(x) \, e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} .$$

Bezeichne:

$$k_n := \frac{2\pi n}{L} \quad ; \qquad \tilde{f}(k_n) := L \, c_n$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k_n} \tilde{f}(k_n) \, e^{i k_n x}, \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f}(k_n) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \, f(x) \, e^{-i k_n x} .$$

Für $L \to \infty$ sind die Werte von k_n sehr nah aneinander: $\Delta k_n = \frac{2\pi}{L}$.
Wenn wir $\sum_{k_n}$ mit Δk_n multiplizieren und dann $\Delta k_n \to 0$ schicken, erhalten wir ein bestimmtes Integral:



$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_n} \Delta k_n \, \tilde{f}(k_n) \, e^{i k_n x} \xrightarrow[\Delta k_n \to 0]{L \to \infty} \boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \tilde{f}(k) \, e^{ikx}} \qquad (i)$$

$$\text{wobei} \quad \tilde{f}(k_n) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \, f(x) \, e^{-i k_n x} \xrightarrow{L \to \infty} \boxed{\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, e^{-ikx}} \qquad (ii)$$

Das Integral in (ii) heißt Fourier-Transformation und $\tilde{f}$ die Fourier-Transformierte von f; (i) heißt die inverse Fourier-Transformation. Anscheinend geht keine Information verloren!

(Bemerkung: Häufig wird eine „symmetrische" Konvention benutzt: wenn $F(k)$ als

$$F(k) := \frac{\tilde{f}(k)}{\sqrt{2\pi}}$$

definiert wird, gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \, F(k) \, e^{ikx}, \qquad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \, f(x) \, e^{-ikx} .)$$

Eigenschaften:

(i) $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \tilde{f}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{ikx} = \tilde{f}(-k)$$ (vgl. Fourier-Reihe, Seite 45)

(ii) Ausgehend von (i) können Kosinus- und Sinus-Darstellungen ähnlich wie auf Seite 45 hergeleitet werden, spielen aber in der Praxis relativ selten eine Rolle.

(iii) Produkt: $(f \cdot g)(x) = f(x) g(x)$

Faltung bzw. Konvolution: $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x-y)\, g(y) \overset{y \to x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g(x-y) f(y)$.

Welche sind die entsprechenden Fourier-Transformierten?

$*$ $$\widetilde{(f * g)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x-y) g(y)\, e^{-ikx} \qquad e^{-ik(x-y)} e^{-iky}$$

$$\overset{\substack{x = y + x' \\ dx = dx'}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')\, e^{-ikx'} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g(y)\, e^{-iky} = \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k)$$

$*$ $$(\tilde{f} * \tilde{g})(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \tilde{f}(k-q)\, \tilde{g}(q)$$

Inverse Transformation davon:

$$\widetilde{(\tilde{f} * \tilde{g})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \tilde{f}(k-q)\, \tilde{g}(q)\, e^{ik \cdot x} \qquad e^{i(k-q)x} e^{iqx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k-q)\, e^{i(k-q)x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \tilde{g}(q)\, e^{iqx} = f(x) \cdot g(x).$$

D.h.: $\widetilde{\text{Faltung}} = \text{Produkt}$, $\widetilde{\text{Produkt}} = \text{Faltung}$!

(iv) In drei Dimensionen: transformiere bzgl. jeder Koordinate!

$$\begin{cases} \tilde{f}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, e^{-ik_1 x_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, e^{-ik_2 x_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_3\, e^{-ik_3 x_3}\, f(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(\vec{r}) \\ f(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{cases}$$

dV, vgl. Blatt 6

In „vier" Dimensionen (Zeit+Raum): bei der Zeitkoordinate wird häufig eine entgegengesetzte Zeichenkonvention verwendet:

$$\begin{cases} \tilde{f}(\omega, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\, e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(t, \vec{r}) \\ f(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \tilde{f}(\omega, \vec{k}) \end{cases}$$

<u>Beispiele</u> (i)

$$f(x) = A\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}} \quad ; \Delta > 0$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} = A \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\left[\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2} + ikx\right]}$$

$$= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[-\frac{1}{\Delta^2}\left(x^2 - 2x_0 x + x_0^2 + ik\Delta^2 x\right)\right]$$

$$= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[-\frac{1}{\Delta^2}\left(x^2 - 2x\left[x_0 - \frac{ik\Delta^2}{2}\right] + x_0^2\right)\right]$$

$$= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[-\frac{1}{\Delta^2}\left(\left(x - x_0 + \frac{ik\Delta^2}{2}\right)^2 + \underbrace{x_0^2 - \left(x_0 - \frac{ik\Delta^2}{2}\right)^2}_{\cancel{x_0^2} - \cancel{x_0^2} + x_0 ik\Delta^2 + \frac{k^2\Delta^4}{4}}\right)\right]$$

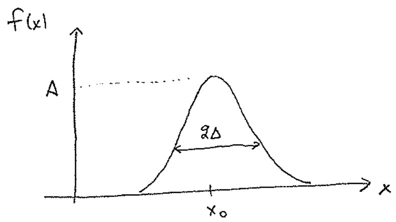
$$= A \cdot e^{-\frac{k^2\Delta^2}{4} - ikx_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[-\frac{1}{\Delta^2}\left(x - x_0 + \frac{ik\Delta^2}{2}\right)^2\right]}$$

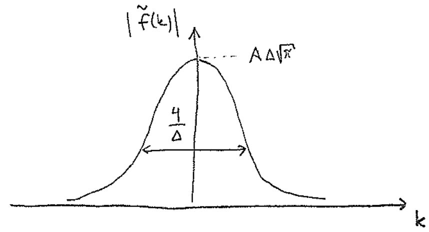
Darf man hier $x = x' + x_0 - \frac{ik\Delta^2}{2}$ substituieren, trotz „i" ?
Vorlesung MMP → ja !

$$= A \cdot e^{-\frac{k^2\Delta^2}{4} - ikx_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{-\left(\frac{x'}{\Delta}\right)^2}}$$

$y' = \frac{x'}{\Delta}$; $dx' = \Delta\, dy'$; Seite 29 $\Rightarrow \Delta \cdot \sqrt{\pi}$

$$= \underline{A \Delta \sqrt{\pi}\; e^{-\frac{k^2\Delta^2}{4} - ikx_0}} \quad ; \quad |\tilde{f}(k)| = A\Delta\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{k^2\Delta^2}{4}}$$





Physikalisch: „<u>Unschärferelation</u>" :

Wellenpaket schmal im x-Raum ⇒ breit im k-Raum !
breit schmal

Bemerkungen: * $A \to \frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}}$, $x_0 \to 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\Delta^2}}$, $\tilde{f}(k) = e^{-\frac{k^2\Delta^2}{4}}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \tilde{f}(0) = 1 \quad \Rightarrow \text{Kap. } 3.3$$

$$* \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [f(x)]^2 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{2(x-x_0)^2}{\Delta^2}} = A^2 \cdot \Delta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2 = \frac{A^2\Delta^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{k^2\Delta^2}{2}} = \frac{A^2\Delta^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} = A^2\Delta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

⇒ Kap. 3.3

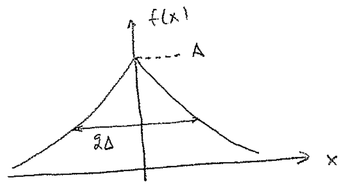
(ii) $f(x) = A\, e^{-\frac{|x|}{\Delta}}$; $\Delta > 0$

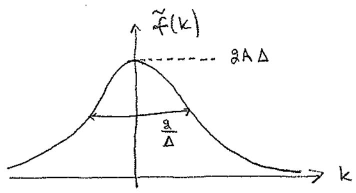
$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} = A \left\{ \int_0^{\infty} dx\, e^{-\frac{x}{\Delta} - ikx} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{\frac{x}{\Delta} - ikx}}_{x = -x' \quad dx = -dx' \ ; \ \text{nachher } x' \to x} \right\}$$

$$= A \int_0^{\infty} dx \left\{ \exp\left[-x\left(\tfrac{1}{\Delta} + ik\right)\right] + \exp\left[-x\left(\tfrac{1}{\Delta} - ik\right)\right] \right\}$$

$$= A \cdot \left\{ \frac{-1}{\frac{1}{\Delta} + ik} \left[e^{-x\left(\frac{1}{\Delta} + ik\right)} \right]_0^{\infty} + \frac{-1}{\frac{1}{\Delta} - ik} \left[\exp^{-x\left(\frac{1}{\Delta} - ik\right)} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= A \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\Delta} + ik} + \frac{1}{\frac{1}{\Delta} - ik} \right\} = \frac{2A\, \Delta^{-1}}{k^2 + (\Delta^{-1})^2}$$





(iii) In drei Dimensionen:

* $\tilde{f}(\vec{k}) = \dfrac{1}{k^2}$, $k := |\vec{k}|$

$$\Longrightarrow \quad f(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2}$$

Benutze Kugelkoordinaten: $d^3\vec{k} \to dk\, k^2\, d\theta \sin\theta\, d\varphi$

Sei $\theta = \sphericalangle(\vec{k}, \vec{r})$. Seite 36 $\Rightarrow$ $\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, g(\cos\theta) = \int_{-1}^{+1} dz\, g(z)$

$$\overset{\int_0^{2\pi} d\varphi}{=} \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^{+1} dz\, e^{ikrz}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dk}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) = \frac{1}{2\pi^2 r} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \sin(kr)}_{\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \sin(t) = \frac{\pi}{2}}$$

$\uparrow$ Aufgabe 10.3

$$= \frac{1}{4\pi r}$$

* $f(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi r}$, $r := |\vec{r}|$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3\vec{r}\, \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{4\pi r}$$

Kugelkoordinaten: $d^3\vec{r} \to dr\, r^2\, d\theta \sin\theta\, d\varphi$

$$= \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^{\infty} dr\, r \int_{-1}^{+1} dz\, e^{-ikrz}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dr}{-ik} \left(e^{-ikr} - e^{ikr} \right) \overset{r = \frac{x}{k}}{=} \frac{1}{2k^2} \int_0^{\infty} dx\, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i}$$

Das Integral ist nicht wirklich definiert, aber mittels eines angemessenen Limes geht es schon:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{\infty} \frac{dx}{i} \left[e^{ix - \varepsilon x} - e^{-ix - \varepsilon x} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{i} \left\{ \left[\frac{e^{x(i-\varepsilon)}}{i - \varepsilon} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-x(i+\varepsilon)}}{i + \varepsilon} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{i} \left\{ -\frac{1}{i - \varepsilon} - \frac{1}{i + \varepsilon} \right\} = \frac{-2}{i \cdot i} = +2$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2} \qquad \text{ok!}$$