3. Integraltransformationen

3.1 Fourier - Reihe   [Lang & Pucker 13.1, 13.3-5]

1768 - 1830

Die Fourier-Analyse gehört zu den wichtigsten Methoden zur Untersuchung von Funktionen (auch experimentelle Daten); Anwendungsbereiche sind u.a.

* Systematische Zerlegung periodischer Funktionen nach ihren Teilfrequenzen (Grundton, Obertöne);
* „Unitäre Basistransformation" Koordinatenraum $\leftrightarrow$ Impulsraum, und Lösung von Differenzialgleichungen im Impulsraum;
* annähernde Darstellung von Funktionen (statt Taylor-Entwicklung).

Sei $f(x) \in \mathbb{R}$ eine periodische Funktion, d.h.

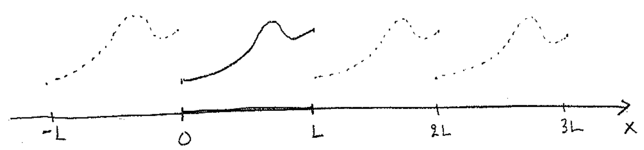
$$f(x+nL) = f(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \,,$$

wobei $L > 0$ die Periode bezeichnet. Dieses ist relevant, falls

(a) $x \to t$ und es um eine Welle / Schwingung geht;

(b) x eine „Winkelvariable" ist, wie z.B. bei Polarkoordinaten: $x \to \varphi$, $L \to 2\pi$;

(c) der Raum kompakt ist, z.B. $x \in (0, L]$. In diesem Fall können wir die Funktion sogar auf mehreren Weisen als eine periodische Funktion darstellen:

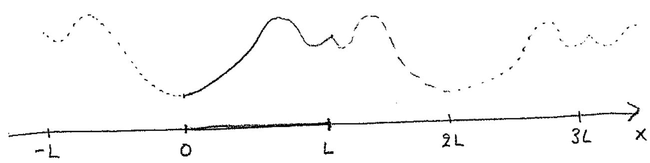


Periode = L

$x \bmod L := \{x+nL \mid x+nL \in (0,L]\}$

$f_p(x) := f(x \bmod L)$

↑ allgemein   ↑ im Def. bereich



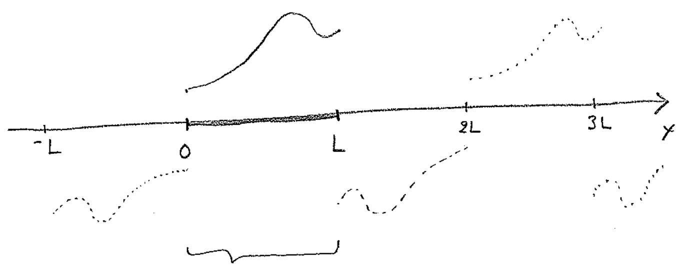
Periode = 2L

„symmetrische Fortsetzung"

$f_s(2L-x) := f(x)\,,\ x \in (0,L]$

$f_p(x) := f_s(x \bmod 2L)$

↑ allgemein   ↑ im Def. bereich



ursprünglicher Definitionsbereich

Periode = 2L

„antisymmetrische Fortsetzung"

$f_A(2L-x) := -f(x)\,,\ x \in (0,L]$

$f_p(x) := f_A(x \bmod 2L)$

↑ allgemein   ↑ im Def. bereich

Komplexe Form der Fourier-Reihe

$\boxed{\text{Sei } f(x) \text{ periodisch, mit Periode } L}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\frac{2\pi n}{L}x}, \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n}{L}\cdot x} \in \mathbb{C}.}$

Die c_n heißen „Fourier-Koeffizienten". (Es wird angenommen, dass die Reihe konvergiert.)

Begründung. (i) („$\Leftarrow$") $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ ist periodisch:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}(x+L)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \cdot \underbrace{e^{i 2\pi n}}_{1 \text{ (Euler-Formel, Seite 4)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot x}$$

(ii) („$\Downarrow$")

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot x} \quad \Big| \cdot e^{-i\frac{2\pi m}{L}\cdot x}$$

$$\Rightarrow \int_0^L dx\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi m}{L}\cdot x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^L dx\, e^{i\frac{2\pi(n-m)}{L}\cdot x}}$$

$n = m \Rightarrow \int_0^L dx = L$

$n \neq m \Rightarrow \frac{L}{i 2\pi (n-m)} \left[e^{i\frac{2\pi(n-m)}{L}x} \right]_0^L = \frac{L}{i 2\pi(n-m)} \left[1 - 1\right] = 0$

$$= L \cdot c_m \Rightarrow \square.$$

(iii) („$\Rightarrow$") Bemerkung:

$$\sum_{n=0}^{m-1} e^{i\frac{2\pi n}{m}(j-k)} = \begin{cases} m, & j = k \\ \frac{1-z^m}{1-z} \text{ mit } z = e^{i\frac{2\pi(j-k)}{m}}, & j \neq k \ (z \neq 1), \end{cases}$$

weil $(1 + z + \ldots + z^{m-1})(1-z) = 1 - z^m$ gilt.

Nehme $j, k \in \{0, \ldots, m-1\} \Rightarrow z^m = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} e^{i\frac{2\pi n}{m}(j-k)} = \delta_{jk}. \quad (*)$$

Diskretisiere:

$$0 \quad \varepsilon \qquad x \equiv j\varepsilon \qquad L \equiv m\varepsilon$$

Es folgt: $f(x) = f(j\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} f(k\varepsilon)\, \delta_{jk}$

$$\overset{\delta_{jk} \text{ durch } (*)}{=} \sum_{n=0}^{m-1} \underbrace{\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(k\varepsilon)\, e^{-i\frac{2\pi n k}{m}}}_{=: c_n'} \cdot \underbrace{e^{i\frac{2\pi n j}{m}}}_{e^{i\frac{2\pi n j\varepsilon}{m\varepsilon}} = e^{\frac{i 2\pi n x}{L}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} c_n'\, e^{\frac{i 2\pi n x}{L}}$$

Dieses gilt $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ auch für $\varepsilon \to 0^+$ $\square$.

Kosinus - und Sinus-Reihen

Weil $f(x)$ reell ist, gilt $\quad c_n^* = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{i\frac{2\pi n x}{L}} \overset{!}{=} c_{-n} \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}$.

Die komplexe Fourier-Reihe kann also umgeschrieben werden:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{2\pi n}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$\overset{\text{Euler}}{=} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ c_n\left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right] + c_n^*\left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]\right\}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right),$$

wobei $\left\{\begin{aligned} a_n &= c_n + c_n^* = 2\,\mathrm{Re}(c_n) \\ b_n &= i(c_n - c_n^*) = -2\,\mathrm{Im}(c_n)\end{aligned}\right\}$ gilt.

Jetzt ist alles reell, und die Summen laufen nur über positive „Kreisfrequenzen" $\frac{2\pi n}{L}$! Die expliziten Ausdrücke für die neuen Fourier-Koeffizienten:

$$\left\{\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \text{„Mittelwert"}\,! \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\left(e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} + e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right) = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \\ b_n &= \frac{i}{L}\int_0^L dx\, f(x)\left(e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} - e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right) = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\end{aligned}\right.$$

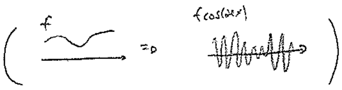
Eigenschaften:

* $b_n = 0 \quad \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow\; f(x)$ ist symmetrisch $\forall\, x$!

* $c_0 = 0,\; a_n = 0 \;\; \forall n \geq 1 \;\Rightarrow\; f(x)$ ist antisymmetrisch $\forall x$!

* „Riemann-Lebesgue-Lemma" (ohne Beweis):

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\int_a^b dx\, f(x)\cos(\varkappa x) = \lim_{\varkappa\to\infty}\int_a^b dx\, f(x)\sin(\varkappa x) = 0$$



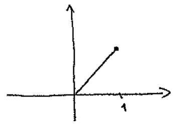
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

* Die Fourier-Darstellung kann abgeleitet / integriert werden; bei Ableitungen erhält man aber

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n b_n}{L}\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n a_n}{L}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right),$$

und falls $n a_n,\, n b_n$ für $n\to\infty$ nicht mehr verschwinden, hat man den Konvergenzbereich verlassen!

Beispiel: $f(x) = x, \quad 0 < x \leq 1$



(i) Darstellung als Funktion mit Periode $L = 1$:

$$c_0 = \int_0^1 dx\, x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \int_0^1 dx\, x\, e^{-i2\pi n x} \overset{n\neq 0}{=} \left[\frac{x}{-i2\pi n} e^{-i2\pi n x}\right]_0^1 + \frac{1}{i2\pi n}\underbrace{\int_0^1 dx\, e^{-i2\pi n x}}_{0}$$

partielle Integration

$$= \frac{i}{2\pi n}$$

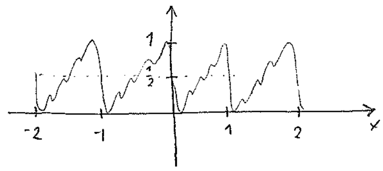
$$\Rightarrow \quad a_n = 2\,\mathrm{Re}\,(c_n) = 0\,; \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\,(c_n) = -\frac{1}{\pi n}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x)$$

symmetrisch

konvergiert langsam; $f'(x)$ nicht OK

antisymmetrisch



(ii) Darstellung als symmetrische Funktion mit Periode $L = 2$: $f_S(x) = |x|,\ |x| \leq 1$.

Aufgabe 9.2 $\Rightarrow$
$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, |x| = \frac{1}{2} \\ a_n = \int_{-1}^{+1} dx\, |x| \cos\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) \end{cases}$$

$$= 2\int_0^1 dx\, x \cos(\pi n x)$$

$$= 2\underbrace{\left[\frac{x}{\pi n}\sin(\pi n x)\right]_0^1}_{0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 dx\, \sin(\pi n x)$$

partielle Integration

$$= +\frac{2}{(\pi n)^2}\left[\cos(\pi n x)\right]_0^1 = \frac{2}{(\pi n)^2}\left[(-1)^n - 1\right] = -\frac{4}{\pi^2 n^2},$$

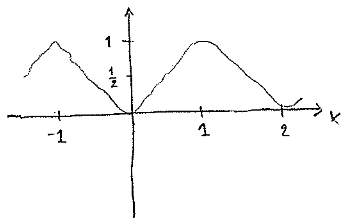
für <u>ungerade</u> n

$$b_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2}\cos(\pi n x)$$

konvergiert schnell; $f'(x)$ auch OK!

symmetrisch



(iii) Darstellung als antisymmetrische Funktion mit Periode $L = 2$: $f_A(x) = x, \quad |x| \leq 1$.

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, x = 0$$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, x\, e^{-i\pi n x} \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left[\frac{x}{-i\pi n} e^{-i\pi n x}\right]_{-1}^{1}}_{\frac{(-1)^n}{-i\pi n} + \frac{(-1)^n}{-i\pi n} = \frac{2i(-1)^n}{\pi n}} + \frac{1}{i\pi n}\underbrace{\int_{-1}^{+1} dx\, e^{-i\pi n x}}_{0}\right\}$$

$$a_n = 0\,; \qquad b_n = -\frac{2}{\pi n}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(\pi n x)$$

konvergiert langsam; $f'(x)$ nicht OK