2.9 Differenzialgleichungen in drei Dimensionen [(Lang & Pucker 11.2)]

Viele der wichtigsten Gleichungen der Physik sind Differenzialgleichungen 1. oder 2. Ordnung in drei räumlichen Dimensionen.

Hydrodynamik: „Kontinuitätsgleichung": $\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$

„Navier-Stokes-Gleichung": $\partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \nu \nabla^2 \vec{v}$

Elektrodynamik: „Maxwell-Gleichungen":

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = \vec{0} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$

„Wellengleichungen":

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = \vec{0} \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{B} - \nabla^2\vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

Quantenmechanik: „Schrödinger-Gleichung": $i\hbar\,\partial_t\Psi = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec{r})\right]\Psi$

Statistische Physik: „Diffusionsgleichung": $\partial_t T = D\cdot\nabla^2 T$

Wir betrachten den „statischen" Limes, d.h. $\partial_t \to 0$, und vorerst homogene Gleichungen („keine Quellen", d.h. $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ in Maxwell) erster Ordnung.

$$\boxed{\nabla\phi = \vec{0}} \iff \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k} = \vec{0}$$

$$\iff \frac{\partial\phi}{\partial x_k} = 0 \quad \forall\, k$$

$$\iff \phi \text{ ist konstant!}$$

(Bemerkung: Im Kap. 2.1 (Seite 10) wurden Extremstellen, $\vec{r}_0$, durch die Gleichung $\nabla f(\vec{r}_0) = \vec{0}$ definiert; hier verlangen wir dagegen, dass $\nabla\phi(\vec{r}) = \vec{0}$ für $\forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ gilt!)

Die Gleichungen $\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$ und $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ besitzen aber unendlich viele nichttriviale (d.h. ortsabhängige) Lösungen!

(z.B. Seite 16: $\vec{B} = \vec{\omega}\times\vec{r} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{B} = 0$; Seite 17: $\vec{E} = \vec{r} \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = \vec{0}$)

$\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$

Sei G ein „einfach zusammenhängendes" Gebiet.

Behauptung: $\boxed{\vec{E} \text{ ist wirbelfrei in } G, \text{ d.h. } \nabla \times \vec{E} = \vec{0}} \iff \boxed{\vec{E} \text{ ist der Form } \vec{E} = -\nabla\phi, \text{ d.h. „hat ein Skalarpotential"}}$

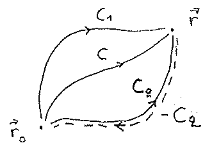
Beweis:

„$\Leftarrow$" $\quad \vec{E} = -\nabla\phi \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \nabla\phi \underset{\uparrow}{=} \vec{0}$.

Poincaré-Lemma (Seite 18)

„$\Rightarrow$" $\quad$ Wähle $\vec{r}_0$, und definiere

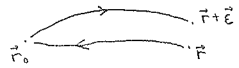
$$\phi(\vec{r}) := -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{s}) .$$



Diese Definition ist unabhängig vom Integrationsweg:

$$\int_{C_1} d\vec{s} \cdot \vec{E} - \int_{C_2} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \oint_{C_1 + (-C_2)} d\vec{s} \cdot \vec{E} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S d\vec{A} \cdot \underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{\vec{0}} = 0 .$$

$\Rightarrow \phi(\vec{r})$ ist eine eindeutige Funktion.

Betrachte jetzt $C_1 = \uparrow_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}}$, $C_2 =$ 

Entlang C_1: $\quad -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{E} \underset{\uparrow}{=} -\vec{\varepsilon} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \mathcal{O}(\vec{\varepsilon}^2)$.

Taylor in $\vec{\varepsilon}$ bzw. Mittelwertsatz

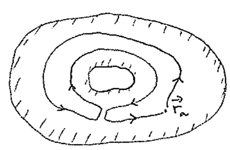
Entlang C_2: $\quad +\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{E} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{E} \underset{\uparrow}{=} \phi(\vec{r}+\vec{\varepsilon}) - \phi(\vec{r}) \underset{\uparrow}{=} \vec{\varepsilon} \cdot \nabla\phi(\vec{r}) + \mathcal{O}(\vec{\varepsilon}^2)$

Definition von ϕ $\qquad$ Taylor in $\vec{\varepsilon}$

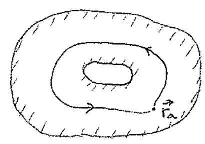
Vergleich $\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi \quad \square$.

Bemerkung: Wenn G nicht einfach zusammenhängend ist, kann die Lösung von $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ noch lokal als $\vec{E} = -\nabla\phi$ dargestellt werden; allerdings ist ϕ nicht eindeutig. Dies führt dazu, dass die „Zirkulation",

$\Gamma := \oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\oint d\vec{r} \cdot \nabla\phi = -[\phi(\vec{r}_a) - \phi(\vec{r}_a)]$ nicht unbedingt verschwindet!



$\Gamma = 0$



$\Gamma \neq 0$ möglich.

Beispiel: $\vec{B} = \frac{j}{\varrho} \vec{e}_\varphi$ (Seite 38)

$\nabla \times \vec{B} = 0$ (Seite 38), aber $\vec{B}$ ist singulär bei $\varrho = 0$, d.h. wir müssen die z-Achse abschneiden!

Zirkulation: $\Gamma = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{h_\varphi}_{\varrho} \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{B}}_{\frac{j}{\varrho}} = 2\pi j \neq 0$!

(vgl. Aufgabe 8.3)

$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$

Sei G ein zusammenhängendes Gebiet „ohne Löcher".

Behauptung:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{B} \text{ ist quellenfrei in } G, \\ \text{d.h. } \nabla \cdot \vec{B} = 0.\end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l}\vec{B} \text{ ist der Form } \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \\ \text{d.h. „hat ein Vektorpotential".}\end{array}}$$

Beweis:

Es ist zuerst zu bemerken, dass ein mögliches $\vec{A}$ nicht eindeutig sein kann:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_1 = \nabla \times \vec{A}_2$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}_1 = \vec{A}_2 + \nabla \chi \qquad (\text{„nur zwei freie Freiheitsgrade"})$$

Seite 40

In der Physik wird diese Tatsache „Eichinvarianz" genannt.

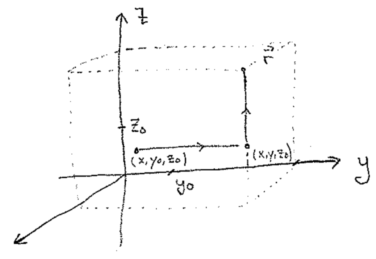
„$\Leftarrow$" $\quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

Poincaré-Lemma (Seite 18)

„$\Rightarrow$" Wir benutzen kartesische Koordinaten.

Durch eine Wahl von χ kann erreicht werden, dass $A_z = 0$ gilt.

Integriere dann über bekannte Komponenten von $\vec{B}$ entlang zweier Achsen:



$$\vec{A}(x,y,z) := \vec{e}_x \left(\int_{z_0}^{z} dz'\, B_y(x,y,z') - \int_{y_0}^{y} dy'\, B_z(x,y',z_0) \right) - \vec{e}_y \int_{z_0}^{z} dz'\, B_x(x,y,z')$$

Es folgt:
$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \int_{z_0}^{z} dz'\, B_y - \int_{y_0}^{y} dy'\, B_z & -\int_{z_0}^{z} dz'\, B_x & 0 \end{vmatrix}$$

der zweite Term ist unabhängig von z!

$$= \vec{e}_x \left(\partial_z \int_{z_0}^{z} dz'\, B_x \right) + \vec{e}_y \left(\partial_z \int_{z_0}^{z} dz'\, B_y \right) + \vec{e}_z \left(-\partial_x \int_{z_0}^{z} dz'\, B_x - \partial_y \int_{z_0}^{z} dz'\, B_y + \partial_y \int_{y_0}^{y} dy'\, B_z \right)$$

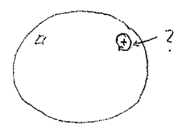
$$= \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z \left[-\int_{z_0}^{z} dz' \underbrace{(\partial_x B_x + \partial_y B_y)}_{-\partial_z B_z\ !} + B_z(x,y,z_0) \right]$$

$$= \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z \left[B_z(x,y,z) - B_z(\cancel{x,}y,z_0) + B_z(\cancel{x,}y,z_0) \right]$$

$$= \vec{B}(x,y,z) \qquad \square .$$

— o —

Bemerkung: Wenn G Löcher hat, kann die Lösung von $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ noch lokal als $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ dargestellt werden; allerdings besitzt $\vec{A}$ Singularitäten („Dirac-Strings"). Dieses führt dazu, dass der „Fluß" $\Phi = \oint_S d\vec{A} \cdot \vec{B}$ $= \oint_S d\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{A} = \int_? d\vec{r} \cdot \vec{A}$ nicht unbedingt verschwindet, weil auch ein infinitesimal kurzes Linienintegral um einen singulären Punkt einen endlichen Beitrag liefern kann! (vgl. Aufgabe 8.4)



Beispiel: $\vec{E} = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ (Seite 36)

$\nabla \cdot \vec{E} = 0$ bei $r > 0$ (Seite 36), aber $\vec{E}$ singulär bei $\vec{r} = \vec{0}$, d.h. wir sollten den Ursprung abschneiden!

Fluß: $\Phi = \oint_S d\vec{A} \cdot \vec{E} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{h_\theta h_\varphi}_{r^2 \sin\theta} \underbrace{\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi}_{\vec{e}_r} \cdot \vec{E} = q \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi d\theta \sin\theta = 4\pi q \neq 0!$

Letztendlich noch ein Beispiel für eine homogene Gleichung zweiter Ordnung:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

„Laplace-Gleichung"

Im Allgemeinen gibt es nichttriviale Lösungen; diese werden „harmonische Funktionen" genannt. (Vgl. Aufgabe 4.2 für den Fall von kugelsymmetrischen Lösungen.) Allerdings ist die Menge der Lösungen relativ „beschränkt":

Behauptung: Wenn am Rande des betrachteten Volumens die Funktion ϕ entweder verschwindet („Dirichletsche Randbedingung") oder einen Gradienten orthogonal zur Oberfläche hat („Neumannsche Randbedingung"), dann gibt es keine überall in V differenzierbaren ($\nabla\phi$ ist endlich) nichttrivialen Lösungen.

Beweis: Aufgabe 7.3(a) [erster Greenscher Satz]

$$\Rightarrow \int_V dV \underbrace{|\nabla\phi|^2}_{\geq 0} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \phi \nabla \phi \overset{\text{Dirichlet}}{\underset{\text{von Neumann}}{=}} 0$$

Wenn über eine nichtnegative Funktion integriert wird und das Integral verschwindet, muß die Funktion selbst verschwinden

$$\Rightarrow |\nabla\phi|^2 = 0 \Rightarrow \nabla\phi = \vec{0} \Rightarrow \phi = \text{const.} \quad \square$$
