2.8 Gaußscher Satz, Stokesscher Satz [Lang & Pucker 9.1-3]

Hauptsatz in einer Dimension (EMTPI): $\int_a^b dx \; F'(x) = F(b) - F(a)$.

Linienintegral (Kap. 2.5 / Seite 24): $\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \nabla\phi = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)$.

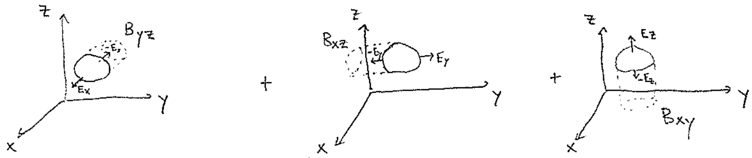
Es geht jetzt um die Verallgemeinerung dieser Sätze auf Oberflächen- bzw. Volumenintegrale.

Hintergrund

Betrachte das Integral

$$I = \int_V dV \; \nabla \cdot \vec{E} = \int_{B_{yz}} dy\,dz \int_{\chi_-(y,z)}^{\chi_+(y,z)} dx \; \partial_x E_x + \int_{B_{xz}} dx\,dz \int_{\psi_-(x,z)}^{\psi_+(x,z)} dy \; \partial_y E_y + \int_{B_{xy}} dx\,dy \int_{\zeta_-(x,y)}^{\zeta_+(x,y)} dz \; \partial_z E_z \, ,$$

wobei wir uns der Freiheit der Integrationsreihenfolge bedient haben (Seite 30). Bei jedem Beitrag kann der Hauptsatz verwendet werden. Graphisch:

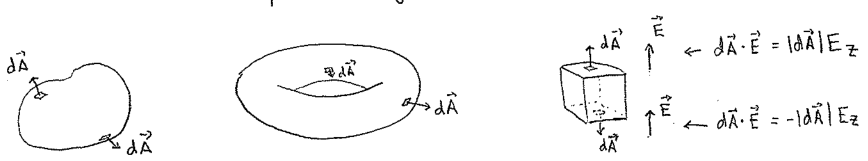
$I =$ 

$$\int_{B_{yz}} dy\,dz \left[E_x(\chi_+, y, z) - E_x(\chi_-, y, z) \right] + \int_{B_{xz}} dx\,dz \left[E_y(x, \psi_+, z) - E_y(x, \psi_-, z) \right] + \int_{B_{xy}} dx\,dy \left[E_z(x, y, \zeta_+) - E_z(x, y, \zeta_-) \right]$$

Der erste Term liegt jeweils auf der „oberen" Oberfläche und zeigt „nach oben" (weil mit Plus-Zeichen); der zweite Term liegt auf der „unteren" Oberfläche und zeigt „nach unten" (weil mit Minus-Zeichen).

Definition

Sei $d\vec{A}$ ein Oberflächenelement (im Sinne von Kap. 2.6 / Seite 27), welches immer „nach außen" zeigt:



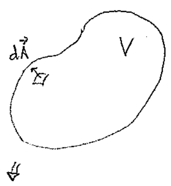
Gaußscher Satz

Wenn $d\vec{A}$ wie oben definiert ist, dann gilt:

$$\boxed{\int_V dV \; \nabla \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}}$$

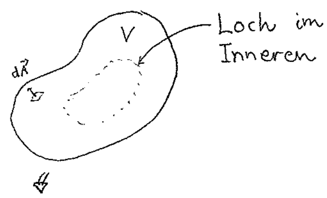
„Divergenz ↔ Flußintegral"

Die Oberfläche ∂V ist der Rand des Volumens V.



$\Downarrow$

∂V ist eine zusammenhängende abgeschlossene Oberfläche.

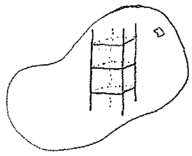


$\Downarrow$

∂V besteht aus zwei disjunkten Oberflächen.

Begründung

Schneide Volumen in kleine Quader.



Für jeden Quader gilt (Seite 16):

$$\nabla\cdot\vec{E} \approx \frac{1}{dx}\left[E_x\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right) - E_x\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)\right] + (x\leftrightarrow y) + (x\leftrightarrow z) \qquad \Big|\cdot dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \quad dV\,\nabla\cdot\vec{E} = d\vec{A}_x\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right) - \vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)\right] + (x\leftrightarrow y) + (x\leftrightarrow z).$$

Summiere über Quader! Die linke Seite wird zum $\sum_{\vec{r}} dV\,\nabla\cdot\vec{E}$.
Auf der rechten Seite kürzen sich alle Beiträge vom Innen:

$$d\vec{A}_x\cdot\left[\ldots + \vec{E}\left(\vec{r}+dx\,\vec{e}_x+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right) - \cancel{\vec{E}\left(\vec{r}+dx\,\vec{e}_x-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)} + \cancel{\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)} - \vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right) + \ldots\right]$$

Auf der „unteren" Oberfläche schreibe

$$d\vec{A}_x\cdot\left[-\vec{E}(\vec{r}_{min})\right] = -d\vec{A}_x\cdot\vec{E}(\vec{r}_{min})$$

Nehme letztendlich Limes $dx, dy, dz \to 0 \quad \Rightarrow \quad \square$.

Anwendung

Das Volumen des Körpers:

$$V = \int_V dV = \frac{1}{3}\int_V dV\cdot 3 \qquad \Big|\ 3 \overset{!}{=} \nabla\cdot\vec{r} \quad (\text{Seite } 16)$$

$$= \frac{1}{3}\int_V dV\,\nabla\cdot\vec{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{3}\int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{r} \qquad !$$

Beispiele

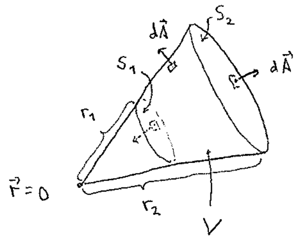
* Kugel vom Radius R.

Seite 32 $\Rightarrow$ $d\vec{A} = d\theta\,d\varphi\,\partial_\theta\vec{r}\times\partial_\varphi\vec{r} = d\theta\,d\varphi\,h_\theta h_\varphi\,\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\varphi = d\theta\,d\varphi\,r^2\sin\theta\,\vec{e}_r$

$$V = \frac{1}{3}\int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{r} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2\sin\theta\,\underbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{r}}_{r=R} = \frac{2\pi}{3}R^3\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta$$

$$\underset{\substack{z=\cos\theta \\ dz=-\sin\theta\,d\theta}}{=} \frac{2\pi}{3}R^3\int_{-1}^{+1} dz = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}R^3}}.$$

* Sei $\vec{E} = q\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \underbrace{\frac{q}{r^2}}_{E_r}\,\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E} \overset{\text{Seite 33}}{=} \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E_r) = 0$



$$\Rightarrow \quad 0 = \int_V dV\,\nabla\cdot\vec{E} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{S_2} d\vec{A}\cdot\vec{E} + \int_{S_1} d\vec{A}\cdot\vec{E} + \int_{\text{Seitenwände}} d\vec{A}\cdot\vec{E}$$

Auf Seitenwänden gilt $d\vec{A}\cdot\vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \quad \int_{S_2} d\vec{A}\cdot\vec{E} = -\int_{S_1} d\vec{A}\cdot\vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{S_2} |d\vec{A}|\,E_r = \int_{S_1} |d\vec{A}|\,E_r$$

„Derselbe Fluß durch jede Kugeloberfläche".

Verallgemeinerungen

* Sei $\vec{E} = \vec{e}_c\, \phi$. (konstant: $\vec{e}_c$) Seite 18 / 22 $\Rightarrow$ $\nabla \cdot \vec{E} = \vec{e}_c \cdot \nabla \phi$

Gauß: $$\int_V dV\, \vec{e}_c \cdot \nabla\phi = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{e}_c\, \phi$$

$$\Leftrightarrow \vec{e}_c \cdot \left[\int_V dV\, \nabla\phi - \int_{\partial V} d\vec{A}\, \phi \right] = 0 .$$

Gilt für jeden $\vec{e}_c$ $\Rightarrow$ $$\boxed{\int_V dV\, \nabla\phi = \int_{\partial V} d\vec{A}\, \phi}$$

* Sei $\vec{E} = \vec{e}_c \times \vec{B}$. Seite 18 / 22 $\Rightarrow$ $\nabla \cdot (\vec{e}_c \times \vec{B}) = -\vec{e}_c \cdot (\nabla \times \vec{B})$

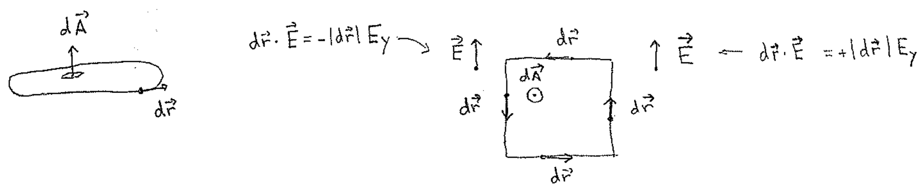
Gauß: $$-\int_V dV\, \vec{e}_c \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\vec{e}_c \times \vec{B})$$

Seite 13: $d\vec{A} \cdot (\vec{e}_c \times \vec{B}) = -\vec{e}_c \cdot (d\vec{A} \times \vec{B})$ $$\Leftrightarrow \vec{e}_c \cdot \left[\int_V dV\, \nabla \times \vec{B} - \int_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{B} \right] = 0 .$$

Gilt für jeden $\vec{e}_c$ $\Rightarrow$ $$\boxed{\int_V dV\, \nabla \times \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{B}}$$

Definition

Sei $d\vec{r}$ ein Kurvenelement (im Sinne von Kap. 2.5 / Seite 23), welches gegen den Uhrzeigersinn bzgl. Flächenelemente $d\vec{A}$ zeigt:



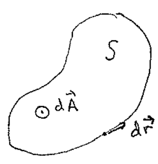
Stokesscher Satz

Wenn $d\vec{A}$ und $d\vec{r}$ wie oben definiert sind, dann gilt:

$$\boxed{\int_S d\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{E} = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}}$$

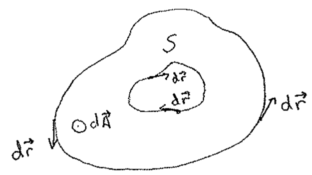
„Rotation $\Leftrightarrow$ Arbeitsintegral" (bzw. „Zirkulation")

Die Kurve ∂S ist der Rand der Oberfläche S.



$\Downarrow$

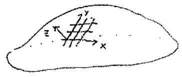
∂S ist eine abgeschlossene Kurve.



$\Downarrow$

∂S besteht aus zwei disjunkten Kurven.

Begründung Schneide Oberfläche in kleine Rechtecks:



Für jedes Rechteck gilt (Seite 17):

$$(\nabla\times\vec{E})_z \approx \frac{1}{dx}\left[E_y\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)-E_y\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)\right]-\frac{1}{dy}\left[E_x\left(\vec{r}+\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)-E_x\left(\vec{r}-\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)\right] \quad \Big|\cdot dx\,dy$$

$$\Rightarrow\ d\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{E}) \approx d\vec{r}_y\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)\right]-d\vec{r}_x\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)\right]$$

Summiere über Rechtecks! Die linke Seite wird zum $\sum_{\vec{r}} d\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{E})$.
Auf der rechten Seite kürzen sich alle Beiträge vom Innen:

$$d\vec{r}_y\cdot\left[\ldots+\vec{E}\left(\vec{r}+dx\,\vec{e}_x+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)-\cancel{\vec{E}\left(\vec{r}+dx\,\vec{e}_x-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)+\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)}-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)+\ldots\right]$$

Beim kleinsten Wert von x schreibe

$$d\vec{r}_y\cdot\left[-\vec{E}(\vec{r}_{min})\right] = -d\vec{r}_y\cdot\vec{E}(\vec{r}_{min})$$

Nehme letztendlich Limes $dx, dy \to 0 \Rightarrow \square$.

Anwendung Sei die Oberfläche flach, d.h. $d\vec{A}(\vec{r}) \upuparrows \vec{n}_c \quad \forall\ \vec{r}$.

Oberflächeninhalt:

$$A = \int_S d\vec{A}\cdot\vec{n}_c$$

$$= \frac{1}{2}\int_S d\vec{A}\cdot 2\vec{n}_c \qquad \Big|\ 2\vec{n}_c = \nabla\times(\vec{n}_c\times\vec{r}) \quad \text{(Seite 17)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_S d\vec{A}\cdot\nabla\times(\vec{n}_c\times\vec{r})$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{2}\int_{\partial S} d\vec{r}\cdot(\vec{n}_c\times\vec{r}) \underset{\text{Seite 13}}{=} \frac{\vec{n}_c}{2}\cdot\int_{\partial S}\vec{r}\times d\vec{r} \quad ! \qquad \text{(vgl. Seite 25)}$$

Beispiele

* Kreis vom Radius R.

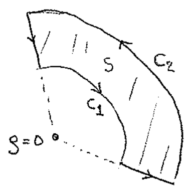
Seite 24/31 $\Rightarrow$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0\end{pmatrix};\quad \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix}-R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix};\quad \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & 0 \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0\end{vmatrix} = R^2\vec{e}_z$$

$$A = \frac{\vec{e}_z}{2}\cdot\int_{\partial S}\vec{r}\times d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2 = \underline{\underline{\pi R^2}}.$$

* Sei $\vec{B} := \underbrace{\frac{j}{\varrho}}_{B_\varphi}\vec{e}_\varphi$ in Zylinderkoordinaten $\Rightarrow$

$$\nabla\times\vec{B} \overset{\text{Seite 33}}{=} \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\varrho & \varrho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_\varrho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \underbrace{\varrho E_\varphi}_{\text{Konstant!}} & 0\end{vmatrix} = \vec{0}$$



$$\Rightarrow 0 = \int_S d\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{C_1} d\vec{r}\cdot\vec{B} + \int_{C_2} d\vec{r}\cdot\vec{B} + \int_{\text{Radialstrecken}} d\vec{r}\cdot\vec{B}$$

Auf Radialstrecken gilt $d\vec{r}\cdot\vec{B} = 0$

$$\Rightarrow \int_{C_2} d\vec{r}\cdot\vec{B} = -\int_{C_1} d\vec{r}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} |d\vec{r}|\,B_\varphi = \int_{C_1} |d\vec{r}|\,B_\varphi$$

„Dieselbe Zirkulation entlang jedes Kreisbogens".

— • —