2.7 Krummlinige Koordinaten [Lang & Pucker 8.1-3]

Im Kap. 2.6 (Seiten 29, 30) haben wir gelernt, wie in Flächen- bzw. Volumenintegralen eine Variablentransformation von „kartesischen" zu „krummlinigen" Koordinaten durchgeführt werden kann:

$$\int_B dx\,dy\ \phi = \int_B du\,dv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \phi \ ; \quad \int_V dx\,dy\,dz\ \phi = \int_V du\,dv\,dw \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|}_{\text{Jacobi-Determinante}} \phi .$$

Einige besonders wichtige Beispiele:

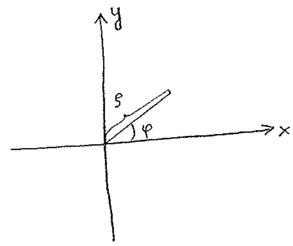
Zwei Dimensionen

* Polarkoordinaten (Seite 29)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$\rho \geq 0\ ;\quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

$dx\,dy \to \rho\, d\rho\, d\varphi$

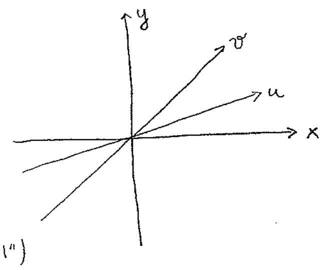


* „Schiefwinklige Achsen"

$u = \alpha x + \beta y$
$v = \gamma x + \delta y$

Schreibe: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. („nicht parallel")



Es folgt: $dx\,dy \to du\,dv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = du\,dv\, |\det M^{-1}|$

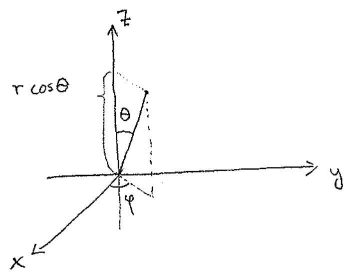
$$= du\,dv \frac{1}{|\det M|} = \frac{du\,dv}{|\alpha\delta - \beta\gamma|} .$$

Drei Dimensionen

* Kugelkoordinaten

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$r \geq 0;\ 0 \leq \theta \leq \pi\ ;\ 0 \leq \varphi < 2\pi$

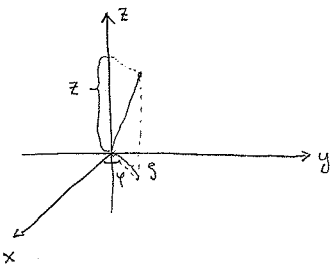


Es folgt (Aufgabe 3.2):

$dx\,dy\,dz \to r^2 dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

* Zylinderkoordinaten

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



Es folgt (wie bei Polarkoordinaten):

$dx\,dy\,dz \to \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Das Ziel jetzt ist, die krummlinigen Koordinaten auch bei <u>Ableitungen</u> benutzen zu können. (Differenzierung und Integration sind letztendlich auch in drei Dimensionen miteinander verwandt: Kap. 2.8.)

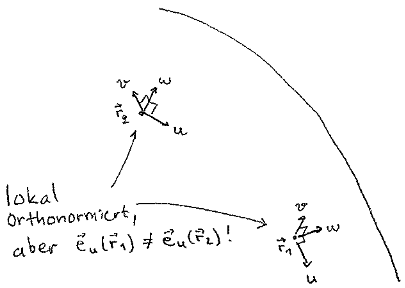
<u>Ausgangspunkt:</u> $\vec{r} = \vec{r}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$.

„Tangentenvektoren" (vgl. Seite 27; 30): $\partial_u \vec{r}$, $\partial_v \vec{r}$, $\partial_w \vec{r}$.

Seien jetzt $h_u := |\partial_u \vec{r}|$, $h_v := |\partial_v \vec{r}|$, $h_w := |\partial_w \vec{r}|$,

und $\vec{e}_u := \frac{1}{h_u} \partial_u \vec{r}$ usw, so daß $|\vec{e}_u| = 1$ gilt.

<u>Falls</u> die Tangentenvektoren auch orthogonal sind (welches z.B. bei „schiefwinkligen Achsen" <u>nicht</u> unbedingt der Fall ist), und (u,v,w) zweckmäßig permutiert worden sind, steht uns eine <u>lokal orthonormierte</u> <u>rechtshändige</u> Basis zur Verfügung:



$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = \vec{e}_u \cdot \vec{e}_w = \vec{e}_v \cdot \vec{e}_w = 0 ,$$

$$\vec{e}_u \times \vec{e}_v = \vec{e}_w , \quad \vec{e}_v \times \vec{e}_w = \vec{e}_u , \quad \vec{e}_w \times \vec{e}_u = \vec{e}_v .$$

Wir möchten ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ in dieser Basis ausdrücken!

<u>Nabla</u>

$\nabla \Phi$ als „abstrakter Vektor" ist parametrisierungsunabhängig; die Komponenten in einer bestimmten Basis können durch Skalarprodukte mit Basisvektoren heraus projiziert werden:

$$(\nabla\Phi)_u = \vec{e}_u \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{h_u} \underbrace{\partial_u \vec{r} \cdot \nabla \Phi}_{\text{Seite 8: } \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}}$$

$$= \frac{1}{h_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} .$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla = \vec{e}_u \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \vec{e}_v \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \vec{e}_w \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w}} .$$

Beispiel: In Kugelkoordinaten (Seite 31) gilt

$$\partial_r \vec{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow h_r = \sqrt{\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta} = 1$$

$$\partial_\theta \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \cos\varphi \\ r\cos\theta \sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow h_\theta = r$$

$$\partial_\varphi \vec{r} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \sin\varphi \\ r\sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

Divergenz

$$\vec E = E_u \vec e_u + E_v \vec e_v + E_w \vec e_w$$

Die Schwierigkeit: $\nabla\cdot\vec E = \vec e_u \cdot \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(E_u\vec e_u + E_v \vec e_v + E_w \vec e_w\right) + \dots$

wegen $\vec e_u \cdot \vec e_v = 0$ oder $\vec e_u \cdot \partial_u \vec e_u = \frac12 \partial_u(\vec e_u\cdot\vec e_u) = 0$

Trick: drücke $\nabla\cdot\vec E$ mittels bekannter geometrischer Größen aus!

Seite 16 $\rightsquigarrow$ $\nabla\cdot\vec E = \lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx}\left\{E_x(\vec r + \tfrac12 dx\,\vec e_x) - E_x(\vec r - \tfrac12 dx\,\vec e_x)\right\} + \dots$

$$= \lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx\,dy\,dz}\left\{dy\,dz\,E_x\left(\vec r + \frac{dx\vec e_x}{2}\right) - dy\,dz\,E_x\left(\vec r - \frac{dx\vec e_x}{2}\right)\right\} + \dots$$

$$= \lim_{d\vec r\to 0}\frac{1}{dV}\left\{d\vec A\cdot\vec E\left(\vec r + \frac{d\vec r}{2}\right) - d\vec A\cdot\vec E\left(\vec r - \frac{d\vec r}{2}\right)\right\} + \dots$$

$d\vec r \to du\,\partial_u\vec r$

$d\vec A \to dv\,dw\,\partial_v\vec r\times\partial_w\vec r = dv\,dw\,h_v h_w\,\vec e_v\times\vec e_w$

$dV \to du\,dv\,dw\,|\partial_u\vec r\cdot(\partial_v\vec r\times\partial_w\vec r)| = du\,dv\,dw\,h_u h_v h_w\,|\vec e_u\cdot(\vec e_v\times\vec e_w)|$

$$= \lim_{du\to 0}\frac{1}{du\,h_u h_v h_w}\left\{h_v h_w E_u\left(\vec r(u+\tfrac{du}{2})\right) - h_v h_w E_u\left(\vec r(u-\tfrac{du}{2})\right)\right\} + \dots$$

D.h.: $$\boxed{\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left\{\partial_u(h_v h_w E_u) + \partial_v(h_w h_u E_v) + \partial_w(h_u h_v E_w)\right\}}$$

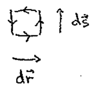
Beispiel: Kugelkoordinaten: (Seite 32 mit $u\to r,\ v\to\theta,\ w\to\varphi$)

$$\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi E_\varphi$$

Für $\vec E\to\vec r = r\vec e_r \Rightarrow \nabla\cdot\vec E = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^3) = 3$ (vgl. Seite 16).

Rotation

Seite 17 $\rightsquigarrow$ $(\nabla\times\vec E)_z = \lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx}\left\{E_y(\vec r + \tfrac12 dx\,\vec e_x) - E_y(\vec r - \tfrac12 dx\,\vec e_x)\right\} + \dots$



$$= \lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx\,dy}\left\{dy\,E_y\left(\vec r + \frac{dx\vec e_x}{2}\right) - dy\,E_y\left(\vec r - \frac{dx\vec e_x}{2}\right)\right\} + \dots$$

$$= \lim_{d\vec r\to 0}\frac{1}{|d\vec A|}\left\{d\vec s\cdot\vec E\left(\vec r + \frac{d\vec r}{2}\right) - d\vec s\cdot\vec E\left(\vec r - \frac{d\vec r}{2}\right)\right\} + \dots$$

$d\vec r\to du\,\partial_u\vec r$, $d\vec s\to dv\,h_v\vec e_v$

$d\vec A\to du\,dv\,h_u h_v\,\vec e_u\times\vec e_v$

$$= \lim_{du\to 0}\frac{1}{du\,h_u h_v}\left\{h_v E_v\left(\vec r(u+\tfrac{du}{2})\right) - h_v E_v\left(\vec r(u-\tfrac{du}{2})\right)\right\} + \dots$$

D.h.: $$\boxed{\nabla\times\vec E =} \frac{\vec e_w}{h_u h_v}\left\{\partial_u(h_v E_v) - \partial_v(h_u E_u)\right\} + \dots = \boxed{\frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\vec e_u & h_v\vec e_v & h_w\vec e_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w\end{vmatrix}}$$

Beispiel: Zylinderkoordinaten: $u\to\rho,\ v\to\varphi,\ w\to z$

$h_\rho = 1,\quad h_\varphi = \rho,\quad h_z = 1$

$$\nabla\times\vec E = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec e_\rho & \rho\vec e_\varphi & \vec e_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z\end{vmatrix}$$

Für $\vec E = \vec\omega\times\vec r$; $\vec\omega = \omega\vec e_z$; $\vec r = \rho\vec e_\rho + z\vec e_z$

$\vec\omega\times\vec r = \omega\rho\,\vec e_z\times\vec e_\rho = \omega\rho\,\vec e_\varphi$

$$\nabla\times\vec E = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec e_\rho & \rho\vec e_\varphi & \vec e_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \omega\rho^2 & 0\end{vmatrix}$$

$$= \frac{\vec e_z}{\rho}\partial_\rho(\omega\rho^2) = 2\omega\vec e_z = 2\vec\omega$$

(vgl. Seite 17).

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

(i) Aus den Formeln für Nabla (Seite 32) und Divergenz (Seite 33):

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left\{ \partial_u\left[\frac{h_v h_w}{h_u}\partial_u\right] + \partial_v\left[\frac{h_w h_u}{h_v}\partial_v\right] + \partial_w\left[\frac{h_u h_v}{h_w}\partial_w\right]\right\}$$

Seite 32:
$u \to r\,;\ h_u \to h_r = 1$
$v \to \theta\,;\ h_v \to h_\theta = r$
$w \to \varphi\,;\ h_w \to h_\varphi = r\sin\theta$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\partial_r\left[r^2\sin\theta\,\partial_r\right] + \partial_\theta\left[\sin\theta\,\partial_\theta\right] + \partial_\varphi\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2}\partial_r\left[r^2\partial_r\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left[\sin\theta\,\partial_\theta\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

(ii) Explizit: Seite 32 $\Rightarrow$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix},\quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix},\quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Es folgt:
$$\partial_r\vec{e}_r = \partial_r\vec{e}_\theta = \partial_r\vec{e}_\varphi = 0$$
$$\partial_\theta\vec{e}_r = \vec{e}_\theta\,;\quad \partial_\theta\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r\,;\quad \partial_\theta\vec{e}_\varphi = 0$$
$$\partial_\varphi\vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi\,;\quad \partial_\varphi\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi\,;$$
$$\partial_\varphi\vec{e}_\varphi = \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow\ \nabla\cdot\nabla = \vec{e}_r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$+\ \vec{e}_\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\quad -\!\!\shortparallel\!\!-\quad\right)$$
$$+\ \vec{e}_\varphi\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\quad -\!\!\shortparallel\!\!-\quad\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$