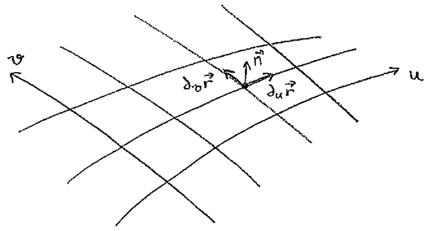
2.6 Oberflächenintegral, Volumenintegral [Lang & Pucker 7.3, 5.4.1]

Betrachtet wird eine allgemeine Oberfläche $\in \mathbb{R}^3$.
Die Ortsvektoren der Oberfläche können durch zwei Koordinaten parametrisiert werden: $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.



Sowohl $\vec{r}(u,v)$ als auch $\vec{r}(u+du, v)$ sind auf der Oberfläche
$\Rightarrow \partial_u \vec{r}$ ist ein Tangentenvektor der Oberfläche.

Dasselbe gilt für $\partial_v \vec{r}$.
Außerdem besitzt die Oberfläche einen Normalvektor, $\vec{n}$; $\vec{n} \cdot \partial_u \vec{r} = \vec{n} \cdot \partial_v \vec{r} = 0$.

Definition: Ein vektorielles Flächenelement ist ein Vektor

$$d\vec{A} := du\,dv\; \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} \,.$$

Aus den Eigenschaften des Vektorproduktes (Kap. 2.2 / Seite 12) folgt:

$$d\vec{A} \parallel \vec{n} \;; \quad |d\vec{A}| = du\,dv \times (\text{Fläche des von } \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r} \text{ gebildeten Parallelogramms})$$

Definition: Oberflächenintegrale sind Flächenintegrale (im Sinne von Kap. 2.5 / Seite 26) über die Koordinaten u, v mit dem „Maß" $d\vec{A}$, z.B.

$$\int_S |d\vec{A}|\, \phi \,, \quad \int_S d\vec{A}\, \phi \,, \quad \int_S d\vec{A} \cdot \vec{E} \,, \quad \int_S d\vec{A} \times \vec{E} \,.$$

Bei einer abgeschlossenen Oberfläche wird die Notation $\oint_S$ benutzt.

Bemerkungen:

* $\int_S |d\vec{A}|$ ermittelt den Oberflächeninhalt.

* $\left| \int_S d\vec{A} \cdot \vec{n} \right|$ ermittelt ebenso den Oberflächeninhalt, weil $d\vec{A} \parallel \vec{n}$ gilt. (Solange $\partial_u \vec{r} \nparallel \partial_v \vec{r}$ gilt, d.h. die Koordinaten nicht parallel laufen, kann $d\vec{A} \cdot \vec{n}$ sein Vorzeichen nicht ändern.)

* Integrale der Form $\int_S d\vec{A} \cdot \vec{E}$ werden „Flußintegrale" genannt, und spielen eine wichtige Rolle in der Elektro- und Hydrodynamik.

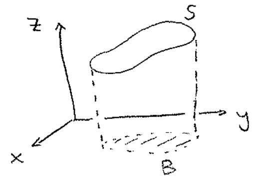
* Sei die Oberfläche die Ebene $z = 0$, und wähle x, y als Koordinaten

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;; \quad \partial_x \vec{r} = \vec{e}_x \;; \quad \partial_y \vec{r} = \vec{e}_y \;; \quad d\vec{A} = dx\,dy\; \vec{e}_x \times \vec{e}_y = dx\,dy\; \vec{e}_z \,.$$

D.h. $\int_S |d\vec{A}|\, \phi = \int_B dx\,dy\; \phi$ ist ein normales Flächenintegral. (Seite 26)

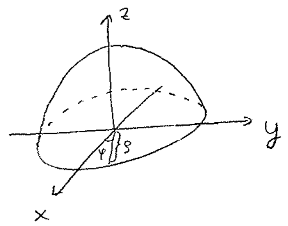
Beispiele:

* Oberfläche der Form $z = f(x,y)$:



$$\vec r = (x, y, f(x,y))$$
$$\partial_x \vec r = (1, 0, \partial_x f)$$
$$\partial_y \vec r = (0, 1, \partial_y f)$$
$$\partial_x \vec r \times \partial_y \vec r = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ 1 & 0 & \partial_x f \\ 0 & 1 & \partial_y f \end{vmatrix} = \vec e_x(-\partial_x f) + \vec e_y(-\partial_y f) + \vec e_z$$
$$|\partial_x \vec r \times \partial_y \vec r| = \sqrt{(-\partial_x f)^2 + (-\partial_y f)^2 + 1}$$
$$\Rightarrow \int_S |d\vec A|\, \phi = \int_B dx\,dy\; \phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} .$$

* Bestimmung des Oberflächeninhalts einer Halbkugel :



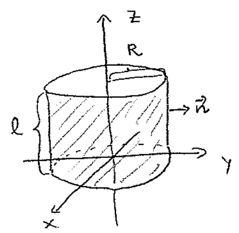
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Sei $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$
(Polarkoordinaten)

$$\Rightarrow \vec r = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \sqrt{R^2-\rho^2})$$
$$\partial_\rho \vec r = (\cos\varphi, \sin\varphi, -\tfrac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}})$$
$$\partial_\varphi \vec r = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$$
$$\Rightarrow \partial_\rho \vec r \times \partial_\varphi \vec r = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \vec e_x\left(\frac{\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right) + \vec e_y\left(\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right) + \vec e_z\,\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho\; |\partial_\rho \vec r \times \partial_\varphi \vec r|$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \sqrt{\frac{\rho^4}{R^2-\rho^2} + \rho^2} = 2\pi \int_0^R d\rho\, \rho\, R \frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \overset{z=\rho^2}{=} \pi R \int_0^{R^2} \frac{dz}{\sqrt{R^2-z}} = 2\pi R\left[-\sqrt{R^2-z}\right]_0^{R^2}$$
$$= \underline{\underline{2\pi R^2}} .$$

* $\int_S d\vec A \cdot \vec r$ über einen Zylindermantel :



Parametrisiere Mantel durch $z \in [0, l]$, $\varphi \in (0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \vec r = (x,y,z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$$
$$\partial_\varphi \vec r = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$$
$$\partial_z \vec r = (0, 0, 1)$$
$$\partial_\varphi \vec r \times \partial_z \vec r = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec e_x(R\cos\varphi) + \vec e_y(R\sin\varphi)$$

$$d\vec A \cdot \vec r = d\varphi\, dz\, (\partial_\varphi \vec r \times \partial_z \vec r) \cdot \vec r = d\varphi\, dz\, (R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi) = R^2\, d\varphi\, dz$$
$$\int_S d\vec A \cdot \vec r = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz\; R^2 = \underline{\underline{2\pi R^2 l}}$$

—— o ——

Bei den Beispielen von Seite 28 hatten wir schon verschiedene Koordinatenwahlen getroffen, die den Symmetrien des vorhandenen Problems geeignet waren. Die Regeln einer Koordinatentransformation können kurz durch den Begriff der Jacobi-Determinanten zusammengefasst werden.

Satz: Sei die Oberfläche eine Ebene $z = \text{const}$, und betrachte ein Integral

$$I = \int_S |d\vec{A}|\,\phi = \int_B dx\,dy\,\phi(x,y) \qquad \text{(vgl. Seite 27)}.$$

In einem anderen Koordinatensystem (u,v) gilt dann

$$I = \int_S du\,dv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \phi(x(u,v),y(u,v)),$$

wobei

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

die 2×2 Jacobi-Determinante heißt.

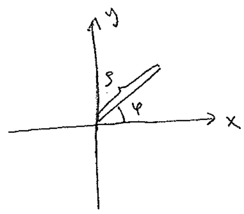
Beweis:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ \text{const} \end{pmatrix} \quad ; \quad \partial_u\vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \partial_v\vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_u x & \partial_u y & 0 \\ \partial_v x & \partial_v y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z\left(\partial_u x\,\partial_v y - \partial_v x\,\partial_u y\right) = \vec{e}_z \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \square.$$

Anwendung: Polarkoordinaten (wie schon auf Seite 28)



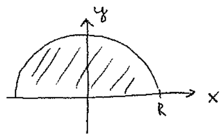
$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

$$\Rightarrow \quad dx\,dy \to \rho\,d\rho\,d\varphi$$

Beispiele:

* Fläche eines Halbkreises (vgl. Seite 26):



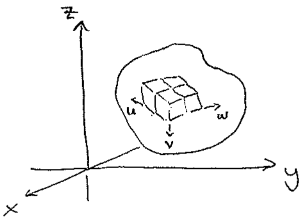
$$A = \int_S |d\vec{A}| = \int_0^\pi d\varphi \int_0^R d\rho\,\rho = \pi\cdot\frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

* $$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = ?$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\; e^{-x^2-y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho\;\rho\; e^{-\rho^2} \overset{z=\rho^2}{=} \pi\cdot\int_0^\infty dz\, e^{-z} = \pi\left[-e^{-z}\right]_0^\infty = \pi$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}\;!$$



Letztendlich definieren wir ein <u>Volumenintegral</u>.
Die Ortsvektoren des Körpers werden durch <u>drei</u> Koordinaten parametrisiert: $\vec{r}(u,v,w)$.
Wenn die Koordinaten nicht parallel laufen, ist $\partial_u\vec{r} \nparallel \partial_v\vec{r} \nparallel \partial_w\vec{r} \nparallel \partial_u\vec{r}$, und $\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r}) \neq 0$ (vgl. Kap. 2.2 / Seite 13).

<u>Definition:</u> Ein Volumenelement $dV \in \mathbb{R}_+$ wird durch das Spatprodukt definiert:

$$dV := du\,dv\,dw\,\left|\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r})\right| .$$

<u>Definition:</u> <u>Volumenintegrale</u> sind bestimmte Integrale (im Sinne von Kap. 2.5 / Seite 26, verallgemeinert zu drei Dimensionen) über die Koordinaten u,v,w mit dem „Maß" dV, z. B.

$$\int_V dV\,\phi\ ,\quad \int_V dV\,\vec{E}\ .$$

<u>Bemerkungen:</u>

* Geometrische Bedeutung des Spatproduktes (Seite 13)
  $\Rightarrow \int_V dV$ ermittelt das Volumen des Körpers.

* In kartesischen Koordinaten $(u\to x,\ v\to y,\ w\to z)$:

$$\left|\partial_x\vec{r}\cdot(\partial_y\vec{r}\times\partial_z\vec{r})\right| = \begin{vmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\ ;\quad dV = dx\,dy\,dz\,.$$

* Wie in zwei Dimensionen (Seite 26) spielt die Ordnung der Integrationen keine Rolle:

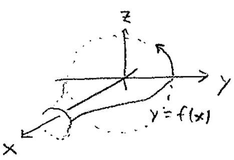
$$\int_{z_a}^{z_b} dz \int_{\psi_a(z)}^{\psi_b(z)} dy \int_{x_a(y,z)}^{x_b(y,z)} dx\,\phi(x,y,z) = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{\xi_a(x)}^{\xi_b(x)} dy \int_{\zeta_a(x,y)}^{\zeta_b(x,y)} dz\,\phi(x,y,z)\,.$$

* Explizit ausgedrückt:

$$\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r}) = \begin{vmatrix}\partial_u x & \partial_u y & \partial_u z\\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z\\ \partial_w x & \partial_w y & \partial_w z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\partial_u x & \partial_v x & \partial_w x\\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y\\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z\end{vmatrix} =: \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

„3x3 Jacobi-Determinante"

<u>Beispiel:</u> Die Kurve $y = f(x) > 0$ drehe sich um die x-Achse:



Das Volumen des Drehkörpers beträgt

$$V = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y^2+z^2\le f^2(x)} dy\,dz = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-f(x)}^{f(x)} dy \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{+\sqrt{f^2(x)-y^2}} dz$$

$$= 2\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-f(x)}^{f(x)} dy\,\sqrt{f^2(x)-y^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Seite 26}}}{=} 2\int_{x_a}^{x_b} dx\,\frac{\pi f^2(x)}{2} = \int_{x_a}^{x_b} dx\,\pi f^2(x)\,.$$