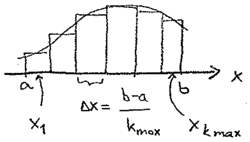
2.5 Linienintegral, Flächenintegral [Lang & Pucker 7.2, 5.4]

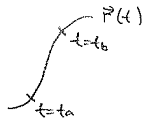
Zur Erinnerung (EMTP I, Kap. 2.4): ein (bestimmtes) Integral $\hat{=}$ eine Summe

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{k_{max}} \Delta x\, f(x_k)$$



In drei Dimensionen kann sowohl der Integrationsbereich als auch der Integrand (Skalarfeld, Vektorfeld) komplizierter sein als in einer Dimension: wie bei Ableitungen gibt es viele Varianten zur Integration.

Wir betrachten zuerst Integration entlang einer Raumkurve $\vec{r}(t)$:



Definition: Im Zeitintervall dt bewegt sich der Massenpunkt den Abstand $|\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)| \overset{\text{Taylor}}{\approx} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$. Die Bogenlänge zwischen t_a und t_b wird als

$$s := \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{\sum_k \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2}$$

definiert. (Dies ist ein normales bestimmtes Integral!)

Definition: Ein Linienintegral entlang der Kurve C wird durch

$$\int_C |d\vec{r}|\, f(\vec{r}) := \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t))$$

gegeben.

Behauptung: Ein Linienintegral ist unabhängig von der Parametrisierung, d.h. man kann statt t auch einen anderen Parameter, λ, benutzen, solange die Beziehung $t \leftrightarrow \lambda$ differenzierbar und invertierbar ist.

Beweis:

(a) EMTP I, Kap. 2.5 (Substitution der Variablen):

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t)) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda\, \frac{dt}{d\lambda} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t(\lambda)))$$

(b) EMTP I, Kap. 2.1 (Kettenregel): $\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\lambda} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}$

$$\Rightarrow \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}) \underset{(a)\&(b)}{=} \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \left|\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right| f(\vec{r}) \quad \square.$$

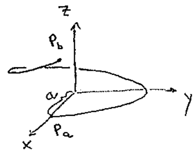
Bemerkung: Die Bogenlänge (d.h. ein Linienintegral mit $f(\vec{r}) := 1$) kann auch als

$$s = \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}}_{=: \vec{e}_v} = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{e}_v$$

(vgl. Aufgabe 3.4)

ausgedrückt werden. Die Form $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{E}$ des Linienintegrals wird als „Arbeitsintegral" bezeichnet und taucht häufig bei vektorwertigen Integranden auf.

Beispiele: (a) Bogenlänge einer Schraubenlinie, $\vec{r}(\varphi) = (a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ b\varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$:



$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + b^2} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

(b) Linienintegral $\int_C d\vec{r}\cdot\vec{E}$ entlang der Schraubenlinie, für den Fall $\vec{E} := c\left(\frac{x\,\vec{e}_x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + d\,\vec{e}_z$:

$$\vec{r}(\varphi) = (a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ b\varphi)$$
$$\frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} = (-a\sin\varphi\ ,\ a\cos\varphi\ ,\ b)$$
$$\vec{E}(\vec{r}(\varphi)) = (c\cos\varphi\ ,\ c\sin\varphi\ ,\ d)$$

$$\Rightarrow \int_C d\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\cdot\vec{E}(\vec{r}(\varphi)) = \int_0^{2\pi} d\varphi\left\{-ac\,\cancel{\sin\varphi\cos\varphi} + ac\,\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} + bd\right\}$$
$$= 2\pi b d\,.$$

— ∘ —

Zur Erinnerung (EMTP I, Kap. 2.4): Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$\int_a^b dx\, F'(x) = F(b) - F(a)\,.$$

Dieser kann jetzt für Linienintegrale „verallgemeinert" werden.

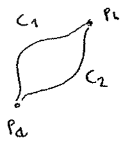
Behauptung: $\int_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi = \phi(P_b) - \phi(P_a)$ wobei P_a, P_b die Endpunkte der Kurve C sind.

Beweis:

$$\int_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi = \int_{t_a}^{t_b} dt\,\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\nabla\phi(\vec{r}(t)) = \int_{t_a}^{t_b} dt\,\sum_k \frac{dx_k}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} \overset{\text{Kap. 2.1 / Seite 8}}{=} \int_{t_a}^{t_b} dt\,\frac{d\phi(\vec{r}(t))}{dt}$$

$$\underset{\text{Hauptsatz}}{=} \phi(\vec{r}(t_b)) - \phi(\vec{r}(t_a)) \quad \square\,.$$

Bemerkung: $\int_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi$ ist <u>unabhängig von der Kurve C</u>, solange $\vec{r}(t_b)$ und $\vec{r}(t_a)$ festgehalten werden! Insbesondere: $\oint_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi = 0$, wobei $\oint$ ein Integral über eine geschlossene Kurve bezeichnet!

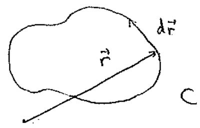


Beispiel: $\vec{E}$ vom Beispiel (b) kann als $\vec{E} = \nabla\phi$ ausgedrückt werden, mit $\phi = c\sqrt{x^2+y^2} + d\,z$. Die Endpunkte sind $P_a = (a, 0, 0)$, $P_b = (a, 0, 2\pi b)$, und $\phi(P_b) - \phi(P_a) = ca + 2\pi bd - ca = 2\pi b d\,.$

— ∘ —

Wir hatten bis jetzt Linienintegrale mit stets einen reellen Wert, sowohl bei einem skalaren ($\int_c |d\vec r| f$) als auch bei einem vektorwertigen ($\int_c d\vec r \cdot \vec E$) Integrand. Linienintegrale können aber auch selbst Vektoren sein, z.B. als $\int_c d\vec r\, f$ oder als $\int_c d\vec r \times \vec E$, wobei immer $\int_c d\vec r$ als $\int_{t_a}^{t_b} dt \, \frac{d\vec r}{dt}$ zu interpretieren ist. Wir betrachten etwas genauer den zweiten Fall, weil dieser uns schon in die Richtung von <u>Flächenintegralen</u> führt.

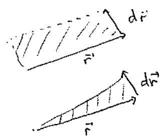
<u>Behauptung:</u> Sei C eine geschlossene Kurve in der Ebene $z=0$. Dann ist $\vec A := -\frac{1}{2}\oint_c d\vec r \times \vec r$ ein Vektor, dessen Richtung senkrecht auf die Ebene ist, und dessen Betrag gleich der von C eingeschlossenen Fläche ist.



<u>Beweis:</u> Kap 2.2 / Seite 12:

$\vec r \times d\vec r$ = Fläche eines Parallelogramms

$\frac{1}{2}\vec r \times d\vec r$ = —"— Dreiecks

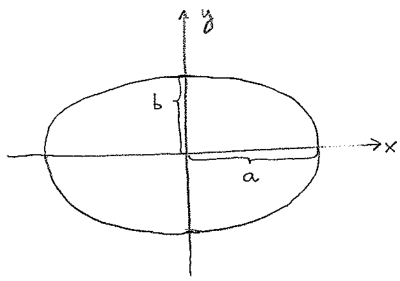


Richtung senkrecht & rechtshändig (nach oben)

Der Teil $\vec r \searrow d\vec r$ zeigt nach unten und wird subtrahiert, d.h. nur die eingeschlossene Fläche bleibt übrig!

Schreibe letztendlich $\vec r \times d\vec r = -d\vec r \times \vec r \Rightarrow \square$.

<u>Beispiel:</u> Die Fläche einer Ellipse:



$$\vec r = (a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$$

$$\frac{d\vec r}{d\varphi} = (-a\sin\varphi, b\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{d\vec r}{d\varphi} \times \vec r = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ -a\sin\varphi & b\cos\varphi & 0 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec e_z\,(-ab\sin^2\varphi - ab\cos^2\varphi) = -ab\,\vec e_z$$

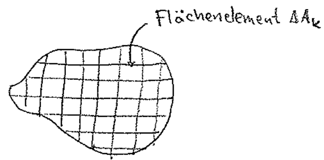
$$\Rightarrow \vec A = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{d\vec r}{d\varphi} \times \vec r = \frac{ab}{2}\vec e_z \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\pi ab \cdot \vec e_z}$$

— ∘ —

Jetzt „ordentliche" Flächenintegrale; wie bei Linienintegralen fangen wir mit „normalen" bestimmten Integralen an, verallgemeinern aber dann den Begriff (im Kap. 2.6) so, dass das Integral unabhängig von der Parametrisierung (d.h. „geometrisch") ist.

Definition: Ein Flächenintegral über einen Bereich $B \in \mathbb{R}^2$ kann als

$$\int_B dA\, f(\vec{x}) := \lim_{\Delta A_k \to 0} \sum_{k=1}^{k_{max}} \Delta A_k f(\vec{x}_k)$$



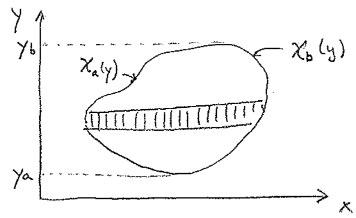
definiert werden (angenommen dass der Limes existiert und eindeutig ist).

Bemerkungen:

* $f = 1 \Rightarrow \int_B dA = \sum_{k=1}^{k_{max}} \Delta A_k = A =$ Fläche
(vgl. Seite 23: Linienintegral mit $f=1$ ermittelt Bogenlänge).

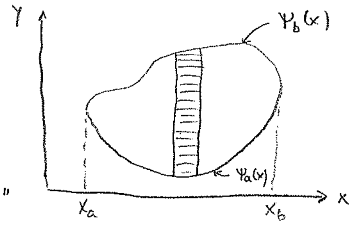
* Verfeinerung zuerst in x-Richtung, nachher in y-Richtung:

$$\int_B dA\, f = \int_{y_a}^{y_b} dy \left\{ \int_{x_a(y)}^{x_b(y)} dx\, f(x,y) \right\}.$$



Umgekehrt:

$$\int_B dA f = \int_{x_a}^{x_b} dx \left\{ \int_{\psi_a(x)}^{\psi_b(y)} dy\, f(x,y) \right\}.$$



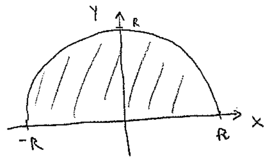
D.h. ein Flächenintegral kann als „Iteration" von normalen 1-dimensionalen Integralen betrachtet werden!

Beispiele:

* Fläche eines Halbkreises:

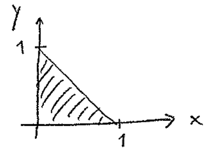
$\psi_a(x) = 0$

$\psi_b(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ (d.h. $x^2+\psi_b^2 = R^2$)



$$\Rightarrow A = \int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2-x^2} \underset{\substack{x = R\sin\varphi \\ dx = R\cos\varphi\, d\varphi}}{=} R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi \sqrt{1-\sin^2\varphi} = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2\varphi = \frac{\pi R^2}{2}.$$

* $\int_B dA\, y$; B das von den Geraden $x=0$, $y=0$ und $x+y=1$ eingeschlosse Dreieck:



(a) zuerst y-Richtung:

$$\int_B dA\, y = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, y = \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, (1-x)^2 = -\frac{1}{6}\left[(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(b) zuerst x-Richtung:

$$\int_B dA\, y = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx\, y = \int_0^1 dy\, y\, [x]_0^{1-y} = \int_0^1 dy\, (y-y^2) = \left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$