2.4 Ableitungen in Komponentenform [Lang & Pucker 10.3.1]

Die Ergebnisse von Kapiteln 2.2, 2.3 (insbesondere die Formeln auf Seiten 14, 18) können am einfachsten hergeleitet werden, indem wir alles in „Komponentenform" ausdrücken; die Komponenten sind reelle Funktionen und folgen elementaren Regeln.

Bausteine:

* Kronecker-Symbol (EMTP I, Kap. 3.1):

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

* Levi-Civita-Tensor (EMTP I, Kap. 3.2):

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 1, & \text{falls } jkl \text{ eine gerade Permutation von 123 ist} \\ -1, & \quad\text{—"— ungerade —"—} \\ 0, & \text{falls mindestens zwei Indizes übereinstimmen} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{jkl} = \delta_{1j}\delta_{2k}\delta_{3l} + \delta_{2j}\delta_{3k}\delta_{1l} + \delta_{3j}\delta_{1k}\delta_{2l} - \delta_{2j}\delta_{1k}\delta_{3l} - \delta_{3j}\delta_{2k}\delta_{1l} - \delta_{1j}\delta_{3k}\delta_{2l}\,.$$

(d.h. $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1,\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$).

Es gilt: $\det M = \sum_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} M_{i_1 1} M_{i_2 2} M_{i_3 3} = \sum_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} M_{1 i_1} M_{2 i_2} M_{3 i_3}$.

* Einstein-Konvention (EMTP I, Kap. 4):

Über zwei gleichen Indizes wird summiert, d.h.

$$t_{\ldots j \ldots j \ldots} := \sum_{j=1}^{3} t_{\ldots j \ldots j \ldots}$$

(In EMTP I / Kap. 4 war ein Index unten, ein oben; jetzt der Einfachheit halber beide unten.)

* Ein Summierungsindex kann immer umgenannt werden, d.h.

$$t_{\ldots j \ldots j \ldots} = t_{\ldots k \ldots k \ldots}\,.$$

Es folgt:

* $\vec a \cdot \vec b = a_k b_k$

* $\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{jkl}\, \vec e_j a_k b_l = \underset{jkl}{\varepsilon_{klj}}\, \underset{j}{a_k}\, \underset{k}{b_l}\, \underset{l}{\vec e_j} = \varepsilon_{jkl}\, a_j b_k \vec e_l$

* $\nabla \cdot \vec E = \partial_k E_k$

* $\nabla \times \vec E = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} = \vec e_j\, \varepsilon_{jkl}\, \partial_k E_l$

Wichtige Identitäten:

* $\delta_{ij} a_j = a_i$

  $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$

  $\delta_{ii} = 3$ [im Allgemeinen: $\delta_{ii} = D =$ Raumdimension]

* $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iik} = 0$

  gleiche Indizes

  $$\varepsilon_{ijk} a_i a_j = \frac{1}{2}\big(\varepsilon_{ijk} a_i a_j + \varepsilon_{\underset{ji}{ijk}}\, a_{\underset{j}{i}} a_{\underset{i}{j}}\big) = \frac{1}{2}\big(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik}\big) a_i a_j = \frac{1}{2}\big(\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk}\big) a_i a_j = 0 .$$

  (d.h. $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$)

* $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\delta_{kn} = \boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} . \qquad (*)$$

  Warum? $k=1$ $\Rightarrow$ man hat etwas nur mit

  $\varepsilon_{231}\varepsilon_{231} = 1\cdot 1 = +1$
  $\varepsilon_{231}\varepsilon_{321} = 1\cdot(-1) = -1$
  $\varepsilon_{321}\varepsilon_{231} = (-1)\cdot 1 = -1$
  $\varepsilon_{321}\varepsilon_{321} = (-1)(-1) = 1$

  Diese stimmen mit $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ überein!
  Und so geht es auch mit $k = 2,3$.

  Oder explizit:

  $$\varepsilon_{ijk} = \delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} + \delta_{2i}\delta_{3j}\delta_{1k} + \delta_{3i}\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{2i}\delta_{1j}\delta_{3k} - \delta_{3i}\delta_{2j}\delta_{1k} - \delta_{1i}\delta_{3j}\delta_{2k}$$
  $$\varepsilon_{lmk} = \delta_{1l}\delta_{2m}\delta_{3k} + \delta_{2l}\delta_{3m}\delta_{1k} + \delta_{3l}\delta_{1m}\delta_{2k} - \delta_{2l}\delta_{1m}\delta_{3k} - \delta_{3l}\delta_{2m}\delta_{1k} - \delta_{1l}\delta_{3m}\delta_{2k}$$

  Multipliziere $\Rightarrow$ 6×6 Terme, aber $\delta_{3k}\delta_{1k} = \delta_{31} = 0$ usw

  $$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{2i}\delta_{2l}\delta_{3j}\delta_{3m} - \delta_{2i}\delta_{2m}\delta_{3j}\delta_{3l} - \delta_{2j}\delta_{2l}\delta_{3i}\delta_{3m} + \delta_{2j}\delta_{2m}\delta_{3i}\delta_{3l}$$
  $$+ (\text{Terme aus } \delta_{2k}\delta_{2k}) + (\text{Terme aus } \delta_{3k}\delta_{3k})$$
  $$\overset{!}{=} (\delta_{1i}\delta_{1l} + \delta_{2i}\delta_{2l} + \delta_{3i}\delta_{3l})(\delta_{1j}\delta_{1m} + \delta_{2j}\delta_{2m} + \delta_{3j}\delta_{3m})$$
  $$- (\delta_{1i}\delta_{1m} + \delta_{2i}\delta_{2m} + \delta_{3i}\delta_{3m})(\delta_{1j}\delta_{1l} + \delta_{2j}\delta_{2l} + \delta_{3j}\delta_{3l})$$
  $$= \delta_{pi}\delta_{pl}\delta_{rj}\delta_{rm} - \delta_{pi}\delta_{pm}\delta_{rj}\delta_{rl}$$
  $$= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad \square .$$

* $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\delta_{jm}\delta_{kn} = \boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} =} \; \delta_{jm}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) = 3\delta_{il} - \delta_{il} = \boxed{2\delta_{il}} .$$

* $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} =} \; 2\delta_{ii} = 2\times 3 = \boxed{6} .$$

* $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} + \varepsilon_{jlk}\varepsilon_{imk} + \varepsilon_{lik}\varepsilon_{jmk} = 0 \qquad \text{„Jacobi-Identität"}$$

  fest

  Summierungsindex

  zyklisch permutiert

  Beweis: $(*)$ $\Rightarrow$ $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{ji}\delta_{lm} - \delta_{jm}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{im} - \delta_{lm}\delta_{ij}$

  $= 0 \quad \square$.

——— o ———

Anwendung: Vektorprodukte ohne Ableitungen (Seite 14)

* Beweis der Graßmann-Identität:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{e}_k\,\varepsilon_{klm}\,a_l\,(\vec{b}\times\vec{c})_m \\
&= \vec{e}_k\,\underbrace{\varepsilon_{klm}\,\varepsilon_{mrs}}_{\varepsilon_{klm}\varepsilon_{rsm}\,=\,\delta_{kr}\delta_{ls}-\delta_{ks}\delta_{lr}}\,a_l b_r c_s \\
&= b_k\vec{e}_k\,a_l c_l - c_k\vec{e}_k\,a_l b_l = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\,.
\end{aligned}
$$

* Beweis der Lagrange-Identität:

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2) &= \varepsilon_{klm}\,a_{1l}a_{2m}\,\varepsilon_{krs}\,b_{1r}b_{2s} \\
&= \underbrace{\varepsilon_{lmk}\,\varepsilon_{rsk}}_{\delta_{lr}\delta_{ms}-\delta_{ls}\delta_{mr}}\,a_{1l}a_{2m}\,b_{1r}b_{2s} \\
&= a_{1l}b_{1l}\,a_{2m}b_{2m} - a_{1l}b_{2l}\,a_{2m}b_{1m} = (\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1)(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2)-(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1)
\end{aligned}
$$

* Beweis der Jacobi-Identität:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) &= \vec{e}_k\Big\{\varepsilon_{klm}\,a_l\,\varepsilon_{mrs}\,b_r c_s \\
&\qquad + \varepsilon_{k\underset{r}{\cancel{l}}m}\,b_{\underset{r}{\cancel{l}}}\,\varepsilon_{m\underset{s}{\cancel{r}}\underset{l}{\cancel{s}}}\,c_{\underset{s}{\cancel{r}}}\,a_{\underset{l}{\cancel{s}}} \\
&\qquad + \varepsilon_{k\underset{s}{\cancel{l}}m}\,c_{\underset{s}{\cancel{l}}}\,\varepsilon_{m\underset{l}{\cancel{r}}\underset{r}{\cancel{s}}}\,a_{\underset{l}{\cancel{r}}}\,b_{\underset{r}{\cancel{s}}}\Big\} \\
&= \vec{e}_k\,a_l b_r c_s\,\big\{\varepsilon_{klm}\varepsilon_{rsm}+\varepsilon_{krm}\varepsilon_{slm}+\varepsilon_{ksm}\varepsilon_{lrm}\big\} \\
&= \vec{e}_k\,a_l b_r c_s\,\big\{\varepsilon_{rsm}\varepsilon_{klm}+\varepsilon_{krm}\varepsilon_{slm}+\varepsilon_{skm}\varepsilon_{rlm}\big\}
\end{aligned}
$$

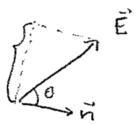
fest

zyklisch: $rs\,k \quad kr\,s \quad sk\,r \quad \Rightarrow 0!$

* Wichtig in der Strahlungstheorie:

$$
\begin{aligned}
\big(\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})\big)\cdot\vec{n} &= n_k\,\varepsilon_{klm}\,E_l\,\varepsilon_{mrs}\,n_r E_s \\
&= n_k E_l\, n_r E_s\,\underbrace{\varepsilon_{klm}\varepsilon_{rsm}}_{\delta_{kr}\delta_{ls}-\delta_{ks}\delta_{lr}} \\
&= |\vec{n}|^2|\vec{E}|^2-(\vec{n}\cdot\vec{E})^2 \\
&\overset{|\vec{n}|:=1}{=} |\vec{E}|^2-(\vec{n}\cdot\vec{E})^2 = |\vec{E}|^2\,(1-\cos^2\theta) \\
&= |\vec{E}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$|\vec{E}|\sin\theta$



= Betrag-Quadrat der „transversalen Komponenten"
(bzgl. Richtung von $\vec{n}$)

Anwendung: Produktregel mit Vektorableitungen (Seite 18)

$$* \quad \nabla\cdot(\phi\vec{E}) = \partial_k(\phi E_k) = \partial_k\phi\, E_k + \phi\,\partial_k E_k = (\nabla\phi)\cdot\vec{E} + \phi\,\nabla\cdot\vec{E}$$

$$* \quad \nabla\times(\phi\vec{E}) = \vec{e}_k\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l(\phi E_m) = \vec{e}_k\,\varepsilon_{klm}\left(\partial_l\phi\, E_m + \phi\,\partial_l E_m\right)$$
$$= (\nabla\phi)\times\vec{E} + \phi\,\nabla\times\vec{E}$$

$$* \quad \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \partial_k\,\varepsilon_{klm}\,E_l B_m = \varepsilon_{klm}\left((\partial_k E_l)B_m + E_l\,\partial_k B_m\right)$$
$$= B_m\,\varepsilon_{klm}\,\partial_k E_l + \varepsilon_{klm}\,E_l\,\partial_k B_m$$
$$= \varepsilon_{mkl}\,B_m\,\partial_k E_l - \varepsilon_{lkm}\,E_l\,\partial_k B_m$$
$$= \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

$*$ Behauptung: $\partial_j\left(\delta_{ij}\dfrac{\vec{B}^2}{2} - B_i B_j\right) = \left(\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\right)_i$ falls $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ gilt.

Beweis: linke Seite: $\partial_i\left(\dfrac{B_k B_k}{2}\right) - \partial_j(B_i B_j)$

$$= B_k\,\partial_i B_k - \underbrace{B_j\partial_j}_{k\,k} B_i - B_i\,\underbrace{\partial_j B_j}_{k\,k}$$
$$= B_k\,\partial_i B_k - B_k\,\partial_k B_i - B_i(\nabla\cdot\vec{B})$$

OK!

rechte Seite: $\varepsilon_{ikl}\,B_k\,\varepsilon_{lmn}\,\partial_m B_n$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{mnl}}_{\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}}\,B_k\,\partial_m B_n = B_k\,\partial_i B_k - B_k\,\partial_k B_i$$

$*$ Behauptung: $-\frac{1}{2}\nabla\times(\vec{r}\times\vec{B}) = \vec{B}$ falls $\vec{B} = $ const.

Beweis:

$$-\frac{1}{2}\left(\nabla\times(\vec{r}\times\vec{B}_c)\right)_i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ikl}\,\partial_k\,\varepsilon_{lmn}\,x_m\,(B_c)_n$$
$$= -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{lmn}\,\underbrace{(\partial_k x_m)}_{\delta_{mk}}\,B_n$$
$$= +\frac{1}{2}\,\underbrace{\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{nkl}}_{2\delta_{in}}\,B_n = B_i \quad \square.$$

$*$ Behauptung: $\nabla\times\left(\dfrac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}\right) = \dfrac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}r^2}{r^5}$ („Feld eines magnetischen Dipols")

Beweis:

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{e}_k\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l\,\varepsilon_{mns}\,\frac{\mu_n x_s}{r^3}$$

Aufgabe 2.3

$$= \vec{e}_k\,(\delta_{kn}\delta_{ls} - \delta_{ks}\delta_{ln})\,\mu_n\,\partial_l\left(\frac{x_s}{r^3}\right) \quad ; \quad \partial_l\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3x_l}{r^5}$$

$$= \vec{e}_k\left(\mu_k\delta_{ls} - \mu_l\delta_{ks}\right)\left(\overset{(3)}{\frac{\delta_{ls}}{r^3}} - 3\overset{(4)}{\frac{x_l x_s}{r^5}}\right) \quad (1) \quad (2)$$

$$= \underset{(1)}{\cancel{3\frac{\vec{\mu}}{r^3}}} - \underset{(2)}{\cancel{3\frac{\vec{\mu}}{r^3}}} - \underset{(3)}{\frac{\vec{\mu}}{r^3}} + \underset{(4)}{3\,\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}\;\vec{r}}{r^5}} \quad \square$$